

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله پنجم

پایه یازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۲۸/دی/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

بودجه بندی دروس

هندسه (۲)	آمار و احتمال	حسابان (۱)
فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱ تا ابتدای تجانس) صفحه ۹ تا ۴۳	فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱ تا ۳ تا ابتدای قانون ضرب احتمال) صفحه ۱ تا ۵۲	فصل ۱، فصل ۲ و فصل ۳ (درس ۱) صفحه ۱ تا ۷۹
شیمی (۲)	فیزیک (۲)	
فصل ۱ و فصل ۲ (تا ابتدای آنتالپی، همان محتوای انرژی است) صفحه ۱ تا ۶۵	فصل ۱ و فصل ۲ (تا ابتدای توان در مدارهای الکتریکی) صفحه ۱ تا ۶۶	

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۳۰ دقیقه	۲۰	۱	۲۰	حسابان
۲۰ دقیقه	۳۰	۲۱	۱۰	هندسه
۲۰ دقیقه	۴۰	۳۱	۱۰	آمار و احتمال
۳۰ دقیقه	۶۰	۴۱	۲۰	فیزیک
۲۰ دقیقه	۸۰	۶۱	۲۰	شیمی
۱۲۰ دقیقه		۸۰ سؤال		مجموع

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفتر چه سوالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سوالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سوالات کنکور سراسری طراحی می شود.



حسابان یازدهم

۱- در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n ، S_n مجموع n جمله اول دنباله است. اگر $S_n - S_{n-1} = 3n + 4$ باشد، حاصل $a_8 - a_5$ کدام است؟

۱۲ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۵ (۴)

۲- اگر اعداد مثبت a و b جواب‌های معادله $2ax^2 - 5bx + 8b = 0$ باشند، حاصل $a + b$ کدام است؟

۵ (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۳- فاصله نقطه M روی خط $y = 2x - 1$ از خط $3x - 4y = 3$ برابر ۲ است. حاصل ضرب طول و عرض نقطه M کدام می‌تواند باشد؟

۸ / ۲۸ (۲) ۶ / ۸ (۱)

-۷ / ۴۸ (۳) -۷ / ۲ (۴)

۴- فاصله بین رأس‌های دو سهمی $f(x) = 3(x-1)(x+5) + 7$ و $g(x) = 3(x+1)(x+7) + k$ برابر $\sqrt{29}$ است. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۲۰ (۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۰ (۴)

۵- به ازای چند مقدار صحیح a سهمی $ay = (a+2)x^2 + (a-1)x + 6 - a$ حداکثر از سه ناحیه دستگاه مختصات می‌گذرد؟

۸ (۱)

۷ (۲)

۶ (۳)

۵ (۴)

۶- اگر $x = a$ جواب معادله $\frac{x+1}{x+a} = \frac{x-2}{x+2}$ باشد، حاصل $a^2 + \frac{4}{a^2}$ کدام است؟

۱۷ (۲) ۲۰ (۱)

۵۳ (۴) ۸۶ (۳)

۷- معادله $x^2 \sqrt{x+3} = (x+3)^{\frac{3}{2}}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) صفر (۱)

۸- مساحت سطح بین نمودارهای دو تابع $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = k - |x-3|$ برابر ۱۶ است. مقدار k کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۵/۵

(۳) ۶ (۴) ۵/۶

۹- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{([x] - \sqrt{5})(\sqrt{30} - [x])}$ شامل چند عدد صحیح است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۱۰- اگر توابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - x^2} + b$ و $g(x) = \{(a, 1), (k, c)\}$ با هم برابر باشند. حاصل $a + b + c + k$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱- تابع خطی $f(x) = ax + b$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x) = (a+b)x + \frac{b^2}{3}$ باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای a چندعضوی است؟

(۱) ۲ (۲) ۴

(۳) ۶ (۴) این مجموعه نامتناهی است.

۱۲- اگر $f(x) = x^2 + \sqrt{5x - x^2} - 4$ و $g(x) = 8x + \sqrt{5x - x^2} - 4$ باشد، برد تابع $f - g$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰

(۳) ۱۱ (۴) بی شمار

۱۳- اگر $f(2^x + x) = 2(x-1) + 2^{1+x}$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴

(۳) ۳ (۴) ۶

۱۴- اگر $f(x) = \sqrt{4 - 2\sqrt{x-1}}$ باشد، مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $g(x) = (f^{-1} \circ f)(x) + (f \circ f^{-1})(x)$ و محور x ها کدام است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۳ (۳) ۳۰ (۴) ۶

۱۵- اگر $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ باشد، دامنه تابع $y = 2 + 3f(1-x)$ کدام است؟

(۱) $[-5, 3]$ (۲) $[-5, 4]$

(۳) $[-3, 5]$ (۴) $[-4, 5]$

۱۶- اگر $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$ باشد، مجموع جواب‌های معادله $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{1-4x^2}{x-1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{17}$ (۲) $\frac{4}{17}$
(۳) $-\frac{4}{17}$ (۴) $-\frac{9}{17}$

۱۷- بزرگ‌ترین بازه‌ای که روی آن تابع $f(x) = x(|x| - ||x| - 2| - 2)$ یک‌به‌یک است، به صورت $[a, b]$ است. ضابطه تابع وارون این تابع در بازه $[a, b]$ کدام است؟

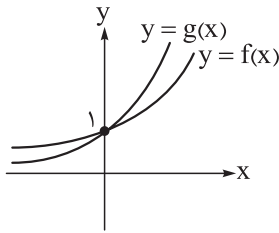
(۱) $f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x} \left(\sqrt{1 - \frac{|x|}{2}} - 1 \right); |x| \leq 1$

(۲) $f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x} \left(\sqrt{1 - \frac{|x|}{2}} - 1 \right); |x| \leq 2$

(۳) $f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x} \left(\sqrt{1 + \frac{|x|}{2}} - 1 \right); |x| \leq 1$

(۴) $f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x} \left(\sqrt{1 + \frac{|x|}{2}} - 1 \right); |x| \leq 2$

۱۸- نمودار دو تابع نمایی f و g با ضابطه‌های $f(x) = (\Delta - m)^x$ و $g(x) = (2m - 3)^x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. اگر مجموعه مقادیر قابل قبول برای m بازه (a, b) باشد، حاصل $b - 3a$ کدام است؟

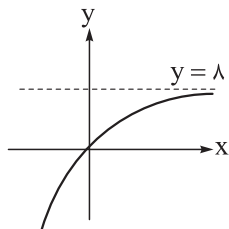


- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) ۴
(۳) -۴
(۴) $-\frac{4}{3}$

۱۹- نمودار تابع $f(x) = 2^{x+b} + a$ از نقاط $(1, 2)$ و $(2, 3)$ می‌گذرد. مقدار $f(3)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۰- نمودار تابع $f(x) = c - 2^{ax+b}$ در زیر رسم شده است. اگر فاصله نقطه‌ای به طول $\frac{1}{2}$ روی نمودار تابع f از خط



$y = 8$ ، دو برابر فاصله آن تا محور x ها باشد، مقدار $f(a+b)$ کدام است؟

- (۱) ۷/۵ (۲) ۶
(۳) -۲۴ (۴) -۱۲۰

هندسه یازدهم

۲۱- در کدام یک از تبدیل‌های زیر، جهت شکل حفظ نمی‌شود؟

- (۱) بازتاب (۲) انتقال
(۳) دوران 90° (۴) دوران 180°

۲۲- اگر پاره خط $A'B'$ دوران یافته پاره خط AB به مرکز نقطه‌ای غیر واقع بر AB (و یا امتداد آن) باشد، مرکز دوران کدام است؟
(۱) A' و B' به ترتیب دوران یافته A و B هستند.)

(۱) محل تلاقی AB و $A'B'$ (۲) محل تلاقی عمودمنصف‌های AB و $A'B'$

(۳) محل تلاقی عمودمنصف‌های AA' و BB' (۴) محل تلاقی AA' و BB'

۲۳- نقطه A' تصویر نقطه A تحت بازتاب نسبت به خط d و O نقطه‌ای روی خط d است. اگر $AA' = 12$ و فاصله نقطه A از پاره خط OA' برابر $9/6$ باشد، فاصله نقطه O از پاره خط AA' کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸
(۳) ۹ (۴) ۱۰

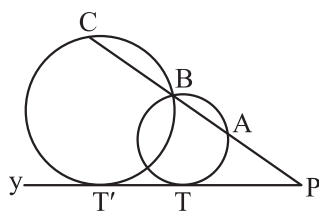
۲۴- دایره $C(O, a-1)$ را با بردار انتقال $\vec{V}$ بر دایره $C'(O', 7-a)$ تصویر می‌کنیم. اگر طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر $2\sqrt{7}$ باشد، طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $3\sqrt{5}$
(۳) $4\sqrt{3}$ (۴) ۸

۲۵- شعاع‌های دو دایره مماس داخل برابر $2x$ و $3x+1$ هستند. اگر طول خط‌المركزین این دو دایره برابر $2x-1$ باشد، اندازه شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۶- در شکل زیر دو دایره در نقاط T و T' بر نیم خط Py مماس هستند و $PT = 3TT'$. حاصل $\frac{PC}{PA}$ کدام است؟



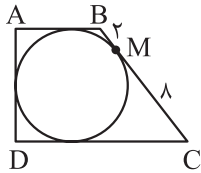
- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) ۲
(۳) $\frac{16}{9}$ (۴) ۴

محل انجام محاسبات

۲۷- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، I مرکز دایره محاطی داخلی و I_a مرکز دایره محاطی خارجی است، نسبت مساحت مثلث BIC به BI_aC کدام است؟

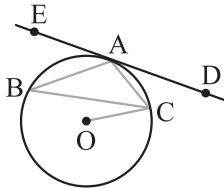
- (۱) ۱
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{4}$

۲۸- در دوزنقه قائم‌الزاویه شکل زیر، نقطه تماس دایره محاطی دوزنقه با یکی از ساق‌ها، آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۲ تقسیم کرده است. طول ارتفاع این دوزنقه کدام است؟



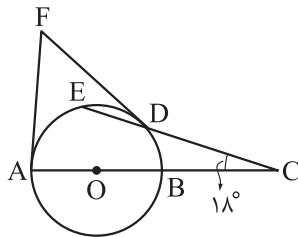
- (۱) ۶
(۲) $7/5$
(۳) ۸
(۴) ۹

۲۹- در شکل زیر، O مرکز دایره است و خط گذرنده از نقاط D و E در نقطه A بر دایره مماس است. اگر $\angle BCO = 15^\circ$ و $\angle CAD = 25^\circ$ باشد، اندازه زاویه EAB چند درجه است؟



- (۱) 40°
(۲) 45°
(۳) 50°
(۴) 55°

۳۰- در شکل زیر O مرکز دایره است و FA و FD بر دایره مماس‌اند. اگر طول وتر DE برابر شعاع دایره باشد و امتداد AB و DE در نقطه C متقاطع باشند، اندازه زاویه F چند درجه است؟



- (۱) 36°
(۲) 38°
(۳) 40°
(۴) 42°

آمار و احتمال

۳۱- کدام یک از گزاره‌های زیر باشد تا ارزش گزاره $s: [(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)] \vee s$ همواره درست باشد؟

$$(p \wedge q) \wedge \sim r \quad (۲) \quad (p \wedge q) \wedge r \quad (۱)$$

$$(\sim p \wedge q) \wedge r \quad (۴) \quad (p \wedge \sim q) \wedge r \quad (۳)$$

۳۲- در جای خالی کدام یک از سورهای زیر را قرار دهیم تا ارزش گزاره سوری « $x^2 + y^2 = 2y - 1$ » درست باشد؟

$$\forall x, \exists y \quad (ب) \quad \forall x, \forall y \quad (الف)$$

$$\exists y, \exists x \quad (پ) \quad \exists y, \forall x \quad (ت)$$

$$\text{الف - ب - ب - ب} \quad (۱) \quad \text{ب - ب - ت} \quad (۲)$$

$$\text{پ - ت} \quad (۳) \quad \text{ت} \quad (۴)$$

۳۳- یک‌سوم زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ شامل عضو ۲ هستند. A چند زیرمجموعه

۴عضوی یا ۵عضوی دارد؟

$$\binom{12}{7} \quad (۴) \quad \binom{11}{6} \quad (۳) \quad \binom{10}{5} \quad (۲) \quad \binom{10}{4} \quad (۱)$$

۳۴- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $A = [a, 7]$ و $B = [5, b]$ ، در این صورت مساحت مربوط به ناحیه

$$A^2 - B^2 \text{ برابر کدام یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟ } (b > 7 \text{ و } a < 5)$$

$$۴۵ \quad (۴) \quad ۳۲ \quad (۳) \quad ۲۱ \quad (۲) \quad ۵ \quad (۱)$$

۳۵- A یک پیشامد x عضوی از فضای نمونه‌ای هم‌شانس S و B یک پیشامد $x + 2$ از همان فضای نمونه‌ای است به طوری که

$$P(B) = \frac{1}{5} + P(A). \text{ اگر تعداد پیشامدهای } x \text{ عضوی و } x + 2 \text{ عضوی در این فضای نمونه‌ای برابر باشند، } P(A) \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{3}{10} \quad (۴) \quad \frac{3}{5} \quad (۳) \quad \frac{2}{5} \quad (۲) \quad \frac{1}{5} \quad (۱)$$

۳۶- یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، پنج برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است.

در پرتاب این تاس، احتمال این که عدد زوج مشاهده شود، چه قدر است؟

$$\frac{11}{18} \quad (۴) \quad \frac{7}{18} \quad (۳) \quad \frac{5}{6} \quad (۲) \quad \frac{1}{6} \quad (۱)$$

۳۷- در یک آزمایش با فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c, d\}$ ، می‌دانیم $P(\{a, b\}) = P(c)$ ، $P(\{b, c\}) = 2P(d)$ و $P(\{a, c\}) = 0/45$ است. مقدار $P(a)$ کدام است؟

- (۱) $0/1$ (۲) $0/15$
(۳) $0/2$ (۴) $0/25$

۳۸- دو تاس پرتاب می‌کنیم و می‌بینیم که مجموع اعداد روبرو شده دو تاس مضرب ۳ است. با چه احتمالی عدد روبرو شده حداقل یکی از تاس‌ها اول است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{11}{12}$

۳۹- A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S هستند، به طوری که $P(A) = 0/5$ ، $P(B) = 0/4$ و $P(A \cap B) = 0/1$ است. مقدار $P(A - B | B' \cup A)$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{2}{7}$ (۲) $\frac{4}{7}$
(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۴۰- تیم ملی والیبال ایران ۱۲ بازیکن دارد که قد هیچ دو بازیکنی با هم برابر نیست. می‌دانیم a از نظر قدی بلندتر از b و c است؛ با چه احتمالی a بلندقدترین بازیکن تیم است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{1}{9}$

فیزیک یازدهم

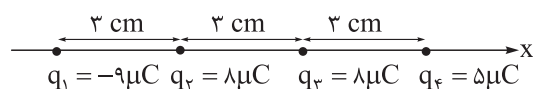
۴۱- بار الکتریکی هسته یون X^{+3} برابر با $C \times 10^{-18} \times 2/08$ است. مجموع بار الکتریکی الکترون‌های این یون، چند میکروکولن است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} C$)

- (۱) $-1/6 \times 10^{-12}$ (۲) $-1/6 \times 10^{-11}$ (۳) $-1/6 \times 10^{-18}$ (۴) $-1/6 \times 10^{-17}$

۴۲- بار الکتریکی دو ذره باردار، یکسان است. ۹۶ درصد از بار یکی از این ذره‌ها را به ذره دیگر منتقل می‌کنیم. برای آن که نوع و اندازه نیروی الکتریکی بین دو ذره تغییر نکند، فاصله بین دو ذره باید چند درصد و چگونه تغییر کند؟

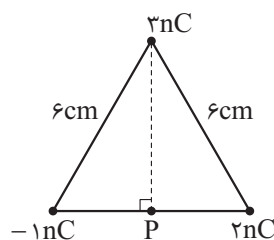
- (۱) ۶۴ درصد افزایش یابد. (۲) ۷۲ درصد افزایش یابد.
(۳) ۶۴ درصد کاهش یابد. (۴) ۷۲ درصد کاهش یابد.

۴۳- مطابق شکل، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x ثابت شده‌اند. بار q_3 روی محور x ، چند سانتی‌متر جابه‌جا شود تا نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_4 در SI برابر با $\vec{F} = -5\vec{i}$ شود؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$)



- (۱) ۳
(۲) ۶
(۳) ۹
(۴) ۱۲

۴۴- مطابق شکل، سه بار الکتریکی نقطه‌ای در رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع 6 cm ثابت شده‌اند. بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه P ، چند کیلوولت بر متر است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$)

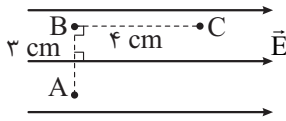


- (۱) ۱۰
(۲) $10\sqrt{2}$
(۳) $10\sqrt{5}$
(۴) $10\sqrt{10}$

۴۵- در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $2 \times 10^4 N/C$ که جهت آن قائم و رو به پایین است، ذره باردار به جرم 8 g معلق و به حال سکون قرار دارد. بار ذره چند میکروکولن است؟ ($g = 10 N/kg$)

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) ۲

۴۶- بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -50 \mu\text{C}$ مطابق شکل زیر در میدان الکتریکی یکنواخت و افقی $E = 4 \times 10^4 \text{ N/C}$ ، ابتدا به اندازه 3 cm از نقطه A تا نقطه B و سپس به اندازه 4 cm از نقطه B تا نقطه C جابه‌جا می‌شود. چه تعداد از موارد زیر درست هستند؟



- الف) تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار از نقطه A تا نقطه C برابر با $+80 \text{ mJ}$ است.
 ب) پتانسیل الکتریکی نقطه B به اندازه 1600 V بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطه C است.
 پ) نقاط A و B هم‌پتانسیل‌اند.

ت) کار میدان الکتریکی در جابه‌جایی بار از نقطه B تا نقطه C برابر با -100 mJ است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۷- به یک کره رسانای خنثی به شعاع 5 cm ، $60 \mu\text{C}$ بار الکتریکی می‌دهیم. چه تعداد از عبارتهای زیر درباره این کره، درست است؟ ($\pi \approx 3$)

الف) چگالی سطحی بار الکتریکی این کره در SI برابر 2×10^{-3} است.

ب) میدان الکتریکی درون کره برابر صفر است.

پ) پتانسیل الکتریکی تمام نقاط داخل و سطح این کره، برابر صفر است.

ت) تمامی بار داده‌شده به کره در سطح خارجی آن توزیع می‌شود.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۸- یک یاخته عصبی را می‌توان با یک خازن تخت مدل‌سازی کرد، به طوری که غشای یاخته به عنوان دی‌الکتریک عمل می‌کند. اگر غشا دارای ثابت دی‌الکتریک $k = 3$ ، ضخامت 9 nm و مساحت سطح 10^{-10} m^2 باشد، ظرفیت این

یاخته عصبی چند پیکوفاراد است؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}}$)

۰/۰۳ (۱) ۰/۳ (۲) ۳ (۳) ۳۰ (۴)

۴۹- خازنی به ظرفیت $10 \mu\text{F}$ دارای بار 2 mC بوده و بین صفحات آن هوا است. یک ذره با بار الکتریکی $1 \mu\text{C}$ ، q ، بین صفحات خازن از مجاورت صفحه مثبت، رها می‌شود. اگر جرم ذره 8 میلی‌گرم باشد، تندی آن در هنگام رسیدن به صفحه مقابل، چند متر بر ثانیه است؟

۲ (۱) ۵ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) ۱۰ (۴)

۵۰- عایق بین صفحه‌های خازنی، هوا و اندازه میدان الکتریکی بین صفحات آن 60 V/mm است. اندازه چگالی سطحی بار الکتریکی هر یک از صفحه‌های این خازن در SI کدام است؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$)

- (۱) $5/4 \times 10^{-7}$ (۲) $5/4 \times 10^{-4}$ (۳) 6×10^{-7} (۴) 6×10^{-4}

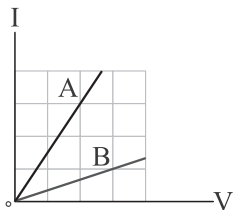
۵۱- در ماشین‌های چمن‌زنی برقی، برای مسافت‌های حداکثر تا 35 m از سیم‌های مسی با قطر 8 mm و برای مسافت‌های طولانی‌تر، از سیم‌های مسی با قطر 2 mm استفاده می‌شود. مقاومت الکتریکی سیم یک ماشین چمن‌زنی به طول 15 m چند برابر مقاومت الکتریکی سیم یک ماشین چمن‌زنی به طول 45 m است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{27}{4}$ (۴) $\frac{4}{27}$

۵۲- دو سیم مسی هم‌جرم A و B به طور جداگانه به اختلاف پتانسیل یکسان و ثابتی وصل هستند. اگر شعاع مقطع سیم A، برابر شعاع مقطع سیم B باشد، در مدت معین، تعداد الکترون‌های عبوری از سیم A، چند برابر تعداد الکترون‌های عبوری از سیم B است؟

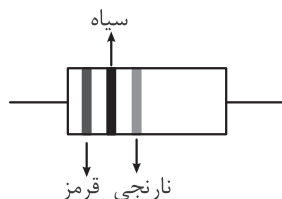
- (۱) $\frac{1}{n^2}$ (۲) n^2 (۳) $\frac{1}{n^4}$ (۴) n^4

۵۳- نمودار جریان الکتریکی عبوری از دو رسانای A و B برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها به شکل زیر است. اگر این دو رسانا به طور جداگانه، به ترتیب، به اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی V و $2V$ وصل شوند، جریان الکتریکی عبوری از رسانای A، چند برابر جریان الکتریکی عبوری از رسانای B می‌شود؟



- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) 9 (۴) $\frac{1}{9}$

۵۴- مقاومت الکتریکی مقاومت ترکیبی شکل زیر برابر با چه تعداد از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟



رنگ	سیاه	قرمز	نارنجی
کد	۰	۲	۳

الف) $17 \text{ k}\Omega$

ب) $20 \text{ k}\Omega$

پ) $23 \text{ k}\Omega$

ت) $26 \text{ k}\Omega$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۵- مقاومت یک قطعه سیم آلومینیمی در دمای 10°C برابر 25Ω است. از این سیم جریان الکتریکی عبور می‌کند و در اثر افزایش دما، مقاومت الکتریکی آن به $27/2\Omega$ می‌رسد. دمای سیم در این حالت، چند درجه سلسیوس است؟
 $(\alpha_{Al} = 4/4 \times 10^{-3} \text{K}^{-1})$

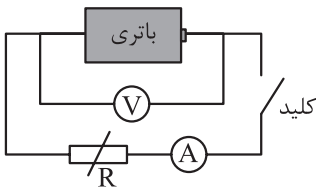
(۴) ۵۰

(۳) ۴۰

(۲) ۳۰

(۱) ۲۰

۵۶- در مدار شکل زیر، در حالتی که کلید باز است، ولت‌سنج آرمانی 19V و در حالتی که کلید بسته است، ولت‌سنج 17V و آمپرسنج آرمانی 2A را نشان می‌دهد. مقاومت درونی باتری چند اهم است؟



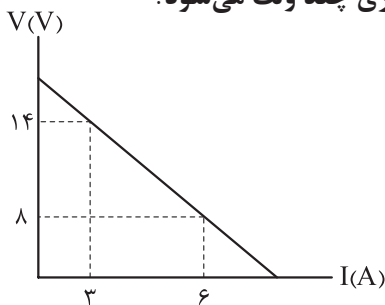
(۱) ۵/۰

(۲) ۱

(۳) ۵/۱

(۴) ۲

۵۷- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک باتری برحسب جریان گذرنده از آن، به شکل زیر است. اگر یک مقاومت 3A اهمی به دو سر این باتری ببندیم، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری چند ولت می‌شود؟



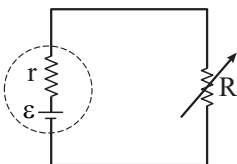
(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۱۲

(۴) ۱۶

۵۸- در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوستا از R به $2R$ برسد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری، 20% درصد افزایش می‌یابد. R چند برابر مقاومت درونی باتری است؟



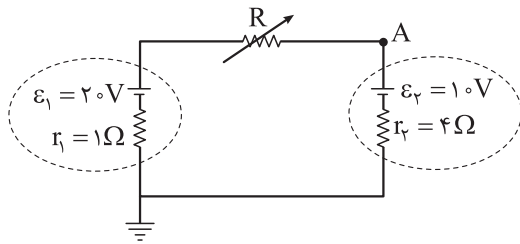
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۵۹- در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رُوستا از مقادیر بسیار بزرگ تا صفر کاهش یابد، پتانسیل الکتریکی نقطه A چند



ولت و چگونه تغییر می کند؟

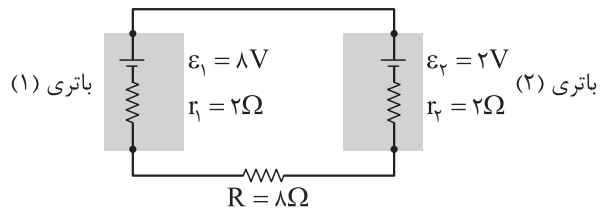
(۱) ۲، کاهش می یابد.

(۲) ۸، کاهش می یابد.

(۳) ۲، افزایش می یابد.

(۴) ۸، افزایش می یابد.

۶۰- در مدار شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۱)، چند برابر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۲) است؟



(۱) ۳

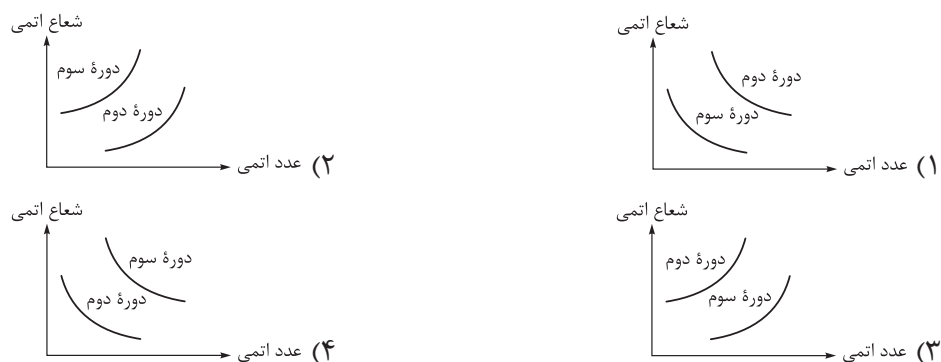
(۲) ۴

(۳) $\frac{7}{4}$

(۴) $\frac{7}{3}$

شیمی یازدهم

۶۱- کدام نمودار دربارهٔ روند کلی تغییر شعاع اتمی عنصرهای دوره‌های دوم و سوم جدول تناوبی، درست است؟



۶۲- چه تعداد از ویژگی‌های زیر را می‌توان به بیش از نیمی از عنصرهای دورهٔ سوم جدول تناوبی نسبت داد؟

- هم‌گروه بودن با حداقل یک عنصر واسطه
- داشتن سطح صیقلی و براق
- تشکیل یون تک‌اتمی با آرایش گاز نجیب
- جامد بودن در دما و فشار اتاق
- توانایی از دست دادن الکترون

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۶۳- دربارهٔ ترکیبی با فرمول شیمیایی C_6H_{12} ، کدام مورد نادرست است؟

- (۱) این مولکول همانند ترکیبی با عنوان عمل‌آورندهٔ کشاورزی، ممکن است رنگ قرمز برم مایع را از بین ببرد.
 - (۲) در اثر سوختن کامل هر مول از این هیدروکربن، ۹ مول گاز اکسیژن مصرف می‌شود.
 - (۳) در ساختار آن به یقین، اتم کربنی وجود ندارد که به یک اتم هیدروژن متصل شده باشد.
 - (۴) در ساختار این ترکیب، قطعاً نسبت تعداد پیوندهای $C-H$ به تعداد پیوندهای $C-C$ ، کمتر از ۴ است.
- ۶۴- براساس واکنش زیر، برای تولید ۱/۱ لیتر فراوردهٔ گازی با چگالی ۲ گرم بر لیتر، چند گرم فلز روی نیاز است؟

(بازده واکنش را ۸۰ درصد در نظر بگیرید؛ $Zn = ۶۵, O = ۱۶, N = ۱۴ : g.mol^{-1}$)



(۱) ۱۳/۰۰ (۲) ۱۶/۲۵ (۳) ۱۹/۰۰ (۴) ۲۰/۳۰

۶۵- کدام مطلب درست است؟

- (۱) گرمای ویژه همهٔ مواد گازی از گرمای ویژهٔ مواد جامد، کم‌تر است.
- (۲) هر چه حاصل‌ضرب جرم در گرمای ویژهٔ یک جسم کم‌تر باشد؛ مقاومت آن جسم در برابر تغییر دما بیشتر خواهد بود.
- (۳) میانگین انرژی جنبشی مولکول‌های یک لیوان آب در دمای اتاق، نسبت به یک قطرهٔ آب در دمای اتاق، بیشتر است.
- (۴) اگر به جرم برابری از نان و سیب‌زمینی در دمای اتاق، گرمای یکسانی دهیم، در مدت‌زمان برابر، تغییر دمای سیب‌زمینی کم‌تر خواهد بود.

۶۶- در یک آلکین، درصد جرمی اتم‌های هیدروژن برابر ۵/۱۲٪ است. چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ آلکین مورد نظر، درست است؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

- نام آن می‌تواند ۴ - هپتین باشد.
- جرم مولی این آلکین از جرم مولی آلکان هم‌کربن خود، ۴ درصد کم‌تر است.
- تفاوت تعداد اتم‌های کربن در ترکیب مورد نظر با تعداد اتم‌های کربن در سرگروه خانوادهٔ آروماتیک‌ها برابر ۳ است.
- شمار گروه‌های CH_3 در ساختار این هیدروکربن می‌تواند با شمار گروه‌های CH_3 در ساختار ۳،۲ - دی‌متیل بوتان برابر باشد.

۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

۶۷- با فرض این‌که گرمای لازم برای تبخیر یک مول آمونیاک مایع، نصف گرمای لازم برای تبخیر یک مول آب است، مقایسهٔ مقدار گرمای مبادله‌شده در واکنش‌های زیر، در کدام گزینه به درستی نشان داده شده است؟ (همهٔ واکنش‌های داده‌شده، گرماده هستند).

- I) $4NH_3(g) + 3O_2(g) \rightarrow 2N_2(g) + 6H_2O(g)$
- II) $4NH_3(l) + 3O_2(g) \rightarrow 2N_2(g) + 6H_2O(l)$
- III) $4NH_3(g) + 3O_2(g) \rightarrow 2N_2(g) + 6H_2O(l)$
- IV) $4NH_3(l) + 3O_2(g) \rightarrow 2N_2(g) + 6H_2O(g)$

- IV > II > I > III (۲) II > III > IV > I (۱)
III > II > I > IV (۴) III > I > II > IV (۳)

۶۸- برای افزایش دمای ۱۰ گرم از هر یک از ماده‌های A و B به اندازهٔ ۱۰ درجهٔ سلسیوس، به ترتیب ۸۰۰ و ۴۰۰ ژول گرما نیاز است. اگر برای بالا رفتن دمای ۱۰ گرم مخلوطی از این دو ماده به اندازهٔ ۱۰ درجهٔ سلسیوس، ۶۵۰ ژول گرما لازم باشد؛ اختلاف جرم دو مادهٔ A و B در مخلوط مورد نظر چند گرم است؟ (گرمای ویژهٔ دو مادهٔ A و B با مخلوط شدن تغییر نکرده است).

۴ / ۵ (۴) ۶ / ۲۵ (۳) ۳ / ۷۵ (۲) ۲ / ۵ (۱)

۶۹- اگر در اثر واکنش $۳۸/۴$ گرم نفتالن با مقدار کافی گاز هیدروژن، ترکیبی کاملاً سیر شده تولید شود؛ کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟ ($C = ۱۲, H = ۱: g.mol^{-1}$)

- (الف) اختلاف جرم فراورده به دست آمده با مقدار عددی جرم نفتالن واکنش داده، برابر $۳/۶$ گرم است.
 (ب) شمار الکترون های پیوندی در ترکیب تولید شده با مقدار عددی جرم مولی گاز سوخت فندک برابر است.
 (پ) تعداد پیوندهای $C-C$ در ساختار فراورده، ۳ برابر تعداد پیوندهای اشتراکی در ساده ترین عضو خانواده آلکان ها است.

(ت) نسبت شمار اتم های هیدروژن به شمار اتم های کربن در ساختار فراورده، یک واحد بیشتر از این نسبت در نفتالن است.
 (۱) الف - پ (۲) الف - ب (۳) پ - ت (۴) ب - پ

۷۰- اگر آرایش الکترونی یون های A^{2+} و M^{3+} به ترتیب به $۳p^6$ و $۳d^1$ ختم شود، تفاوت عدد اتمی دو عنصر A و M، برابر با عدد اتمی است.

(۱) اتم سازنده هالوژن مایع

(۲) اولین فلز واسطه جدول دوره ای

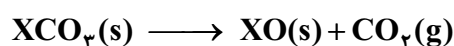
(۳) فلز قلیایی با رنگ شعله زرد

(۴) فلز قلیایی با نماد شیمیایی تک حرفی

۷۱- هر مولکول از آلکان راست زنجیر A دارای ۲۰ اتم است و در ساختار آلکان راست زنجیر B، ۱۰ پیوند $C-H$ وجود دارد. نقطه جوش آلکان های راست زنجیر A و B در فشار $۱ atm$ به ترتیب کدام اعداد بر حسب درجه سلسیوس می توانند باشند؟

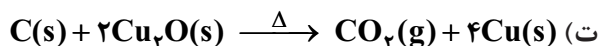
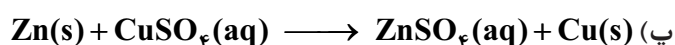
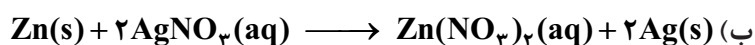
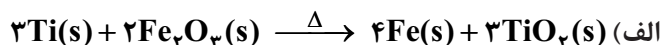
(۱) $۳۶,۶۹$ (۲) $-۱,۶۹$ (۳) $۵۶,۳۸$ (۴) $-۵, -۱۲$

۷۲- ۲۰ گرم از کربنات فلز X با خلوص ۸۴ درصد، مطابق معادله زیر تجزیه شده و ۸ گرم اکسید فلز تولید می شود. جرم مولی فلز، چند برابر جرم مولی گاز اکسیژن است؟ ($O = ۱۶, C = ۱۲: g.mol^{-1}$)



(۱) ۸/۰ (۲) ۷۵/۰ (۳) ۱/۶ (۴) ۱/۵

۷۳- چه تعداد از واکنش های زیر به طور طبیعی انجام پذیر هستند؟



(۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷۴- کدام موارد از مطالب زیر، درباره ششمین عنصر دسته d جدول تناوبی درست است؟

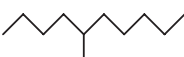
(الف) استخراج آن از سنگ معدن، دشوارتر از استخراج فلز مس از سنگ معدن است.

(ب) یون دو بار مثبت آن، یکی از سازنده‌های زنگ آهن است.

(پ) می‌توان درصد قابل توجهی از سنگ معدن آن را در فرایند استخراج به فلز تبدیل کرد.

(ت) مصرف سالانه آن در جهان از مصرف سالانه فلز طلا در جهان بیشتر است.

(۱) ب و پ (۲) الف و پ (۳) ب و ت (۴) الف و ت

۷۵- اگر فرمول مولکولی ترکیب $(C_7H_5)_2CH(CH_2)_x C(CH_3)_3$ با  یکسان باشد، نام این ترکیب کدام است؟

(۱) ۴- اتیل - ۲، ۲ - دی‌متیل هگزان

(۲) ۳- اتیل - ۶، ۶ - دی‌متیل هپتان

(۳) ۵- اتیل - ۲، ۲ - دی‌متیل هپتان

(۴) ۶- اتیل - ۲، ۲ - دی‌متیل اوکتان

۷۶- با توجه به جدول زیر، کدام مطلب نادرست است ؟

نام سوخت	گرمای آزادشده (kJ / g)	فراورده‌های سوختن	مقدار کربن دی‌اکسید به ازای هر کیلوژول انرژی تولیدشده (g)
بنزین	A	CO_2, CO, H_2O	X
زغال‌سنگ	B	Z, CO_2, NO_2, CO, H_2O	Y

(۱) تنوع عنصرهای سازنده بنزین نسبت به زغال‌سنگ، کم‌تر است.

(۲) مقدار A، بیشتر از مقدار B و مقدار X، کم‌تر از مقدار Y است.

(۳) یکی از راه‌های بهبود کارایی زغال‌سنگ، انجام واکنش $Z(g) + CaO(s) \rightarrow$ است.

(۴) از انحلال فراورده نیتروژن‌دار حاصل از سوختن زغال‌سنگ در آب، محیطی بازی ایجاد می‌شود.

۷۷- یک قطعه فلز مس به جرم $50^\circ C$ گرم و دمای $60^\circ C$ در $25^\circ C$ گرم آب با دمای $5^\circ C$ فرو برده می‌شود. کدام یک از مطالب زیر، درست است؟ (از تبادل گرمایی با محیط صرف نظر شود و ظرفیت گرمایی ویژه آب، اتانول و مس به ترتیب برابر $2/4, 4/4$ و $0/4$ ژول بر گرم بر درجه سلسیوس است).

(۱) طی این فرایند، تفاوت میانگین تندی حرکت ذرات دو ماده افزایش می‌یابد.

(۲) مقدار تغییر انرژی گرمایی در قطعه فلز مس، بیشتر از مقدار تغییر انرژی گرمایی در آب است.

(۳) در این تعادل گرمایی، تغییرات دمایی قطعه فلز مس، $5/25$ برابر تغییرات دمای آب است.

(۴) اگر به جای آب، اتانول با جرم و دمای یکسان به کار رود، دمای پایانی قطعه فلز مس پایین‌تر خواهد بود.

۷۸- مخلوطی به جرم ۱۶ گرم از ۲- متیل بوتان و ۲- پنتن را در اختیار داریم. اگر با افزودن ۱۶ گرم برم مایع به مخلوط مورد نظر و کامل انجام شدن واکنش(ها)، رنگ قرمز مخلوط به طور کامل از بین برود؛ درصد جرمی ۲- متیل بوتان در مخلوط اولیه کدام است؟ ($\text{Br} = ۸۰, \text{C} = ۱۲, \text{H} = ۱: \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) ۳۰ (۲) ۴۳ / ۷۵ (۳) ۵۶ / ۲۵ (۴) ۷۰

۷۹- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر دربارهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی به چه صورت است؟

- حدود ۴۵ درصد از عنصرهای آن، جز عنصرهای اصلی محسوب می‌شوند.
- آرایش الکترونی اتم ۴ عنصر آن به زیرلایهٔ نیمه‌پر ختم می‌شود.
- ۳ عنصر اول آن، فقط یک کاتیون پایدار تشکیل می‌دهند.
- در آرایش الکترونی ۸ عنصر آن، زیرلایهٔ ۳d به طور کامل پر است.

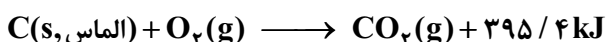
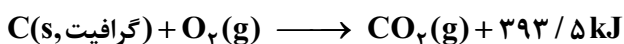
(۱) درست - درست - درست - درست

(۲) درست - نادرست - درست - درست

(۳) نادرست - درست - نادرست - نادرست

(۴) نادرست - نادرست - نادرست - نادرست

۸۰- از سوختن یکی از آلوتروپ‌های کربن، ۵۶ لیتر گاز در شرایط STP تولید و ۹۸۸ / ۵ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. با توجه به معادلهٔ واکنش‌های زیر، نوع آلوتروپ و جرم آن برحسب گرم، کدام است؟ ($\text{C} = ۱۲ \text{ g.mol}^{-1}$)



(۲) گرافیت - ۱۵

(۴) گرافیت - ۳۰

(۱) الماس - ۱۵

(۳) الماس - ۳۰

مهم ترین ویژگی های آزمون های خیلی سبز در پایه های دهم و یازدهم:

- ۱- برگزاری دست کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه
- ۲- برگزاری آزمون های ویژه برای زمان های خاص (میان ترم، ترم، پس از عیدو...)
- ۳- امکان جبران عقب ماندگی ها یا دوره مطالب برای تثبیت آن ها

پاسخ نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سوالات این آزمون را می توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.

پاسخ نامہ آزمون آزمائشی خلی سبز



مرحلہ پنجم

پایہ یازدهم

تاریخ برگزاری: ۲۸/دی/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	زہرا پورشیر - شمیم پهلوان شریف - فرشاد حسن زاده - خشایار خاکی - مجید رفعتی - علی شہرایی محمد گودرزی - میلاد منصوری - حسین نادری - محمدسجاد نقیہ
ہندسہ	امیرحسین ابومحبوب - محمدطاہر شعاعی - صبا مہدوی - حسین ہاشمی طاہری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاہی
شیمی	امیرمحمد کنگرانی - محدثہ ملک پور

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامہ	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیہ	محمدسجاد نقیہ	فرامرز سلطان کریمی	عادل حسینی سجاد داوطلب	محمدرضا راسخ منصور زرکش اصفہانی علیرضا کاظمی بقا
ہندسہ	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	فرزانه خاکپاش	زہرا جالینوسی مہدی خوشنویس ماہان فنی فر ابوالفضل ناصری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	علیرضا کاظمی بقا فرزانه خاکپاش ماہان فنی فر
فیزیک	نوید شاہی	یاشار انگوتی	علیرضا عبداللہی	علیرضا عبداللہی	ماہان فنی فر امیر محمودی انزایی محمد مہدی یوسفی چہرقانی
شیمی	یاسر عبداللہی	محدثہ ملک پور	محدثہ ملک پور	ہومن زندگی	علی حیدری علیرضا کرمانی صدرا عبادی

سرپرست محتوایی: فاطمہ آقاجانپور

ویژہ یازدهمی های ۱۴۰۳



آزمون آزمایشی خلی سبز

سپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	راضیه سادات خلدی نسب - زهرا صفری محیا غنی فرد - زهرا فرهادی مهر مریم مسلمی زاده - ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	سحر ازلی تاش - مریم حسین زاده سارا حاتمی - سپیده سخایی مائده صبری - نیلوفر فرخجسته مهدیه گل پور - لیلا نعمت پور



در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n ، مجموع n جمله اول دنباله است. اگر $S_n - S_{n-1} = 3n + 4$ باشد، حاصل $a_8 - a_5$ کدام است؟

کدام است؟

۱۵ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۱۲ (۱)



Hint

رابطه مجموع n جمله اول (S_n) و مجموع $n-1$ جمله اول (S_{n-1}) را بنویسید، حاصل $S_n - S_{n-1}$ جمله عمومی دنباله را نشان می‌دهد، سرانجام با استفاده از جمله عمومی (a_n) مقدار $a_8 - a_5$ را به دست آورید.

دکتر Box

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت (قدرنسبت) به جمله قبل از خودش به دست آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود.

در دنباله حسابی، اختلاف هر ۲ جمله متوالی برابر قدرنسبت است:

$$a_n - a_{n-1} = d$$

(قدرنسبت دنباله حسابی را با d نشان می‌دهیم.)

جمله پنجم

جمله n ام دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است.

$$4, 9, 14, 19, 24, \dots$$

$$+5 +5 +5 +5$$

برای مثال:

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 5 \\ a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1)(5) = 5n - 1 \end{cases}$$

اگر ۲ جمله دلخواه a_m و a_n از یک دنباله حسابی معلوم باشند، آن‌گاه:

$$\begin{cases} a_m = a_1 + (m-1)d \\ a_n = a_1 + (n-1)d \end{cases} \xrightarrow{\text{پایین - بالا}} a_m - a_n = (m-n)d$$

برای مثال:

$$\begin{cases} a_8 = a_1 + 7d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow a_8 - a_5 = 3d$$

مجموع n جمله اول دنباله حسابی از $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ یا $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** مجموع n جمله اول (S_n) و $n-1$ جمله اول (S_{n-1}) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \end{cases}$$

پس حاصل $S_n - S_{n-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n$$

در نتیجه با توجه به $S_n - S_{n-1} = 3n + 4$ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$a_n = 3n + 4$$

گام دوم: حالا که جمله عمومی را داریم می‌توانیم a_8 و a_5 را محاسبه کنیم.

$$a_n = 3n + 4 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{n=8} a_8 = 3(8) + 4 = 28 \\ \xrightarrow{n=5} a_5 = 3(5) + 4 = 19 \end{cases}$$

گام سوم: در آخر کافی است مقدار $a_8 - a_5$ را به دست آوریم تا جواب حاصل شود:

$$a_8 - a_5 = 28 - 19 = 9$$

دنباله حسابی یک دنباله خطی است و جمله عمومی آن را می‌توان به صورت $a_n = an + b$ نوشت که ضریب $(a)n$ قدرنسبت دنباله را نشان می‌دهد.

در جمله عمومی دنباله $(a_n = 3n + 4)$ با توجه به نکته بالا ضریب n قدرنسبت را نشان می‌دهد؛ بنابراین $d = 3$ است؛ در

$$a_8 - a_5 \xrightarrow{a_m - a_n = (m-n)d} = 3d = 3 \times 3 = 9$$

نتیجه حاصل $a_8 - a_5$ برابر می‌شود با:



تیزبازی



۲ اگر اعداد مثبت a و b جواب‌های معادله $2ax^2 - 5bx + 8b = 0$ باشند، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)



از S و P استفاده کن. **Hint**

درس‌Box

اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو جواب حقیقی x_1 و x_2 را داشته باشد، می‌توان رابطه‌های زیر را بین این جواب‌ها و ضرایب معادله نوشت:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

مجموع جواب‌ها

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

حاصل ضرب جواب‌ها

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: a و b جواب‌های معادله هستند؛ پس می‌توانیم روابط مجموع و حاصل ضرب آن‌ها را به صورت زیر بنویسیم:

$$S = a + b = -\frac{(-5b)}{2a} = \frac{5b}{2a} \quad (۱)$$

$$P = a \times b = \frac{8b}{2a} = \frac{4b}{a} \quad (۲)$$

گام دوم: از معادله (۲) با فرض ناصفر بودن b می‌توانیم مقدار a را به دست آوریم:

$$ab = \frac{4b}{a} \xrightarrow{b \neq 0} a = \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 = 4 \xrightarrow{a \text{ مثبت است.}} a = 2$$

گام سوم: مقدار a را در معادله (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$2 + b = \frac{5b}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4$$

در نتیجه خواسته سؤال برابر $a + b = 10$ است.

فاصله نقطه M روی خط $y = 2x - 1$ از خط $3x - 4y = 3$ برابر ۲ است. حاصل ضرب طول و عرض نقطه M کدام می تواند باشد؟

$$۸/۲۸ (۲)$$

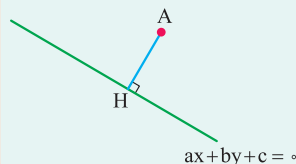
$$۶/۸ (۱)$$

$$-۷/۲ (۴)$$

$$-۷/۴۸ (۳)$$

مختصات نقطه M رو به صورت $(\alpha, 2\alpha - 1)$ در نظر بگیر و از فرمول درس باکس استفاده کن.

فاصله نقطه از خط: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $L(x, y) = ax + by + c = 0$ از رابطه زیر به دست می آید:



این یعنی مختصات نقطه A را در معادله خط L جای گذاری کن.

$$AH = \frac{|L(x_0, y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$ax + by + c = 0$$

Hint

دانش Box

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقطه M روی خط $y = 2x - 1$ قرار دارد؛ پس مختصات آن را $M(\alpha, 2\alpha - 1)$ در نظر می گیریم و هدف مسئله محاسبه مقادیر ممکن α است.

گام دوم: طبق رابطه درس باکس، فاصله نقطه M را از خط داده شده حساب می کنیم:

$$\text{فاصله } MH = \frac{|3(\alpha) - 4(2\alpha - 1) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-\alpha + 1|}{5} = 2 \Rightarrow |\alpha - 1| = 10$$

گام سوم: معادله قدرمطلق بالا را حل می کنیم:

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 10 \Rightarrow \alpha = \frac{11}{5} \Rightarrow 2\alpha - 1 = \frac{17}{5} \\ \text{یا} \\ \alpha - 1 = -10 \Rightarrow \alpha = -\frac{9}{5} \Rightarrow 2\alpha - 1 = -\frac{23}{5} \end{cases}$$

گام چهارم: پس دو نقطه با مختصات $(\frac{11}{5}, \frac{17}{5})$ و $(-\frac{9}{5}, -\frac{23}{5})$ برای M می توان در نظر گرفت که حاصل ضرب طول و عرض آن ها برابر می شود با:

$$\begin{cases} \frac{11}{5} \times \frac{17}{5} = \frac{187}{25} = \frac{748}{100} = 7/48 \\ \text{یا} \\ (-\frac{9}{5}) \times (-\frac{23}{5}) = \frac{207}{25} = \frac{828}{100} = 8/28 \end{cases}$$

فاصله بین رأس‌های دو سهمی $f(x) = 3(x-1)(x+5) + 7$ و $g(x) = 3(x+1)(x+7) + k$ برابر $\sqrt{29}$ است. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۳۰ (۴)

۲۸ (۳)

۲۴ (۲)

۲۰ (۱)



Hint

درتس Box

معادله سهمی‌ها را به فرم مربع کامل بنویسید.
معادله سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به فرم مربع کامل به صورت $y = a(x - (-\frac{b}{2a}))^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ نوشته می‌شود که نقطه رأس سهمی نامیده می‌شود. $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$

در نتیجه برای به دست آوردن مختصات رأس سهمی، کافی است طول رأس سهمی را که برابر $x_s = -\frac{b}{2a}$ است، در معادله سهمی جای‌گذاری کنیم تا عرض آن نیز به دست آید. می‌توانیم مستقیم نیز عرض رأس را از رابطه $y_s = \frac{-\Delta}{4a}$ به دست آوریم.

گام اول: طبق الگوی درس‌بکس، معادله هر دو سهمی را به فرم مربع کامل می‌نویسیم: ✓ **پاسخ خیلی تشریحی**

$$f(x) = 3(x^2 + 4x - 5) + 7 = 3((x+2) - 9) + 7 = 3(x+2)^2 - 20$$

$$g(x) = 3(x^2 + 8x + 7) + k = 3((x+4) - 9) + k = 3(x+4)^2 + k - 27$$

گام دوم: در نتیجه نقاط $A(-2, -20)$ و $B(-4, k-27)$ به ترتیب رأس‌های دو سهمی f و g هستند.

یادآوری: فاصله دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از یکدیگر برابر $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ است.

طبق یادآوری بالا، فاصله دو رأس را برابر $\sqrt{29}$ قرار می‌دهیم:

$$AB = \sqrt{(-4+2)^2 + (k-7)^2} = \sqrt{29} \Rightarrow 4 + (k-7)^2 = 29 \Rightarrow (k-7)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-7=5 \Rightarrow k=12 \\ \text{یا} \\ k-7=-5 \Rightarrow k=2 \end{cases}$$

در نتیجه حاصل ضرب دو مقدار قابل قبول برای k برابر ۲۴ است.

به ازای چند مقدار صحیح a سهمی $ay = (a+2)x^2 + (a-1)x + 6-a$ حداکثر از سه ناحیه دستگاه مختصات می‌گذرد؟

۲ ناحیه یا ۳ ناحیه

۸ (۱)

۷ (۲)

۶ (۳)

۵ (۴)

مشاوره در سؤالاتی شبیه این سؤال که از زیرمبحث «گذر سهمی از ربع‌های دستگاه مختصات» است. رسم شکل کلی سهمی لازم است و بهتر است به جای این که با P و S کار کنید، با خود ضرایب a ، b و c کار کنید؛ ساده‌تر است.

درس‌Box

جدول زیر شرایط لازم برای گذر سهمی از ربع‌های دستگاه مختصات را بیان می‌کند.

$P < 0$ یا $ac < 0$	عبور از هر چهار ربع	۱
$\Delta > 0$	عبور از حداقل سه ربع	۲
$c \leq 0$ و $b < 0$ ، $a < 0$ ، $\Delta > 0$	فقط از ربع اول نگذرد.	۳
$c \leq 0$ و $b > 0$ ، $a < 0$ ، $\Delta > 0$	فقط از ربع دوم نگذرد.	۴
$c \geq 0$ و $b < 0$ ، $a > 0$ ، $\Delta > 0$	فقط از ربع سوم نگذرد.	۵
$c \geq 0$ و $b > 0$ ، $a > 0$ ، $\Delta > 0$	فقط از ربع چهارم نگذرد.	۶
$P \geq 0$ یا $ac \geq 0$	حداکثر از سه ربع بگذرد.	۷
$\Delta \leq 0$	از دو ربع بگذرد.	۸

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا از رابطه داده‌شده، y را تنها می‌کنیم و معادله سهمی را به دست می‌آوریم:

$$y = \left(\frac{a+2}{a}\right)x^2 + \left(\frac{a-1}{a}\right)x + \frac{6-a}{a}$$

گام دوم: و طبق جدول مهم درس‌باکس، برای این که این سهمی حداکثر از ۳ ناحیه دستگاه مختصات عبور کند، کافی است P را نامنفی کنیم:

$$y = \underbrace{\left(\frac{a+2}{a}\right)}_A x^2 + \underbrace{\left(\frac{a-1}{a}\right)}_B x + \underbrace{\frac{6-a}{a}}_C \Rightarrow P = \frac{C}{A} = \frac{\frac{6-a}{a}}{\frac{a+2}{a}} = \frac{6-a}{a+2} \geq 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -2 < a \leq 6$$

گام سوم: اما با توجه به معادله سهمی، بدیهی است که a نمی‌تواند صفر باشد؛ در نتیجه مجموعه قابل قبول برای a برابر $\{0\} - [-2, 6]$ است که این مجموعه شامل ۷ عدد صحیح -1 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6 است.

اگر $x = a$ جواب معادله $\frac{x+1}{x+a} = \frac{x-2}{x+2}$ باشد، حاصل $a^2 + \frac{4}{a}$ کدام است؟ در خود معادله صدق می‌کند.

۱۷ (۲)

۲۰ (۱)

۵۳ (۴)

۸۶ (۳)



$x = a$ جواب معادله‌س، به جای هر x ، a قرار بده و به معادله گویا برحسب a حل کن.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** چون $x = a$ یک جواب معادله است؛ پس در آن صدق می‌کند و می‌توانیم به جای هر x ، a قرار دهیم و تساوی هم‌چنان برقرار است:

$$\frac{a+1}{2a} = \frac{a-2}{a+2}$$

گام دوم: حالا معادله بالا را حل می‌کنیم تا مقدار a به دست آید. برای همین طرفین وسطین می‌کنیم:

$$2a(a-2) = (a+1)(a+2) \Rightarrow 2a^2 - 4a = a^2 + 3a + 2 \Rightarrow a^2 - 7a - 2 = 0$$

گام سوم: در این مرحله به جای این‌که معادله بالا را حل کنیم و سپس با جای‌گذاری مقدار a در عبارت $a^2 + \frac{4}{a}$ حاصل را به دست آوریم، صرفاً براساس اتحادهای جبری به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a^2 - 2 = 7a$$

حال طرفین تساوی را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$a - \frac{2}{a} = 7$$

و حالا طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^2 + \frac{4}{a^2} - 4 = 49 \Rightarrow a^2 + \frac{4}{a^2} = 53$$



معادله $x^2\sqrt{x+3} = (x+3)^{\frac{3}{2}}$ چند جواب حقیقی دارد؟ ۷

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



Hint با فاکتورگیری حل کن. از چی فاکتور می‌گیری؟ ... آفرین، $\sqrt{x+3}$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x^2\sqrt{x+3} = (x+3)\sqrt{x+3}$$

اما دقت کنید که باید $x+3$ مثبت باشد؛ پس جواب‌های محدوده $x > -3$ قابل قبول است.

گام دوم: همه عبارت‌ها را به یک سمت تساوی می‌بریم و از $\sqrt{x+3}$ فاکتور می‌گیریم:

$$(x^2 - x - 3)\sqrt{x+3} = 0$$

گام سوم: حاصل ضرب دو عبارت صفر شده است؛ پس حداقل یکی از آن‌ها صفر است، اما با توجه به شرط $x > -3$ ، فقط عبارت

$x^2 - x - 3$ می‌تواند برابر صفر شود:

$$x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

با در نظر گرفتن مقدار تقریبی $\sqrt{13} \approx 3.6$ هر دو جواب در محدوده $(-3, +\infty)$ و قابل قبول‌اند.

دقت کنید که $x = -3$ را به عنوان جواب در نظر نگیرید، زیرا عبارت $x+3$ با توان گویا نوشته شده است و طبق متن کتاب

درسی سال دهم، فقط اعداد مثبت را می‌توانیم با توان گویا بنویسیم؛ در نتیجه محدوده قابل قبول x بازه $(-3, +\infty)$ است و

$x = -3$ قابل قبول نیست.

گول نخوری

مساحت سطح بین نمودارهای دو تابع $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = k - |x-3|$ برابر ۱۶ است. مقدار k کدام است؟

۵/۵ (۲)

۵ (۱)

۶/۵ (۴)

۶ (۳)



Hint

ابتدا ضابطه های دو تابع را به صورت دوضابطه ای بنویسید، سپس نمودار توابع f و g را در یک دستگاه رسم کنید. سطح بین نمودار که یک مستطیل است را برابر ۱۶ قرار دهید، مقدار k به دست می آید.

درسی Box

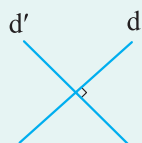
• برای محاسبه شیب خط گذرنده از نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ کافی است اختلاف عرض دو نقطه را به اختلاف طول دو نقطه تقسیم کنیم؛ یعنی:

$$m_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

• برای محاسبه طول پاره خط گذرنده از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ، از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

• شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر هستند:



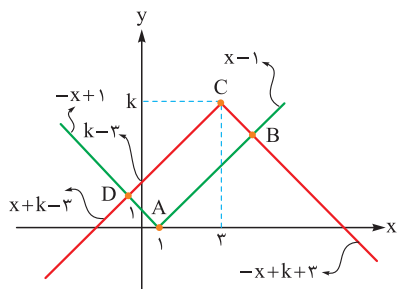
$$m_{d'} = -\frac{1}{m_d}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا تابع $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = k - |x-3|$ را به صورت دوضابطه ای می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x-1 \geq 0 \\ -x+1 & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & ; x \geq 1 \\ -x+1 & ; x < 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} k-(x-3) & , x-3 \geq 0 \\ k-(-(x-3)) & , x-3 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x+k+3 & x \geq 3 \\ x+k-3 & x < 3 \end{cases}$$

گام دوم: نمودار توابع f و g را در یک دستگاه رسم می کنیم:



گام سوم: با توجه به نمودار، چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است، زیرا اضلاع مستطیل دوهیو بر هم عمودند. (حاصل ضرب شیب شان -1 است).

گام چهارم: برای محاسبه مساحت محدود به نمودار، ابتدا مختصات نقطه B که از محل برخورد دو خط به معادلات $y = x-1$ و $y = -x+k+3$ ایجاد شده است را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} y = x-1 \\ y = -x+k+3 \end{cases} \Rightarrow x-1 = -x+k+3 \Rightarrow 2x = k+4 \Rightarrow x = \frac{k+4}{2} \Rightarrow y = \frac{k+4}{2} - 1 = \frac{k+2}{2}$$

بنابراین مختصات رئوس A ، B و C در مستطیل به صورت های $A(1, 0)$ و $B(\frac{k+4}{2}, \frac{k+2}{2})$ و $C(3, k)$ می باشند.



گام پنجم: طول اضلاع AB و BC را پیدا می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{k+4}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{k+2}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{k+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{k+2}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{k+2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(k+2)^2}{2}} = \frac{|k+2|}{\sqrt{2}} \xrightarrow{k > 0} AB = \frac{k+2}{\sqrt{2}}$$

همین‌طور محاسبه ضلع BC:

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{k+4}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{k+2}{2} - k\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{k-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-k}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{k-2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(k-2)^2}{2}} = \frac{|k-2|}{\sqrt{2}} \xrightarrow{k > 4} BC = \frac{k-2}{\sqrt{2}}$$

گام ششم: با توجه به شکل داریم:

$$S_{ABCD} = AB \times BC \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{k+2}{\sqrt{2}} \times \frac{k-2}{\sqrt{2}} = \frac{k^2 - 4}{2}$$

گام هفتم: در آخر مساحت مستطیل به‌دست‌آمده از گام ششم را مساوی ۱۶ قرار می‌دهیم و k را حساب می‌کنیم:

$$S_{ABCD} = 16 \Rightarrow \frac{k^2 - 4}{2} = 16 \Rightarrow k^2 - 4 = 32 \Rightarrow k^2 = 36 \xrightarrow{k > 0} k = 6$$

دامنه تابع $f(x) = \sqrt{([x] - \sqrt{5})(\sqrt{30} - [x])}$ شامل چند عدد صحیح است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

Hint

مثل چندجمله‌ای‌ها باهش برخورد کن و عبارت زیر رادیکال رو تعیین علامت کن، فقط حواست باشه براکت حتماً باید صحیح باشه.

گام اول: دامنه تابع مجموعه مقادیری از x است که به ازای آن‌ها عبارت زیر رادیکال نامنفی است؛ پس این عبارت را تعیین علامت

می‌کنیم و در این راه فعلاً کاری با براکت نداریم:

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{30}$
$[x] - \sqrt{5}$	-	+
$\sqrt{30} - [x]$	+	-
$([x] - \sqrt{5})(\sqrt{30} - [x])$	-	+

پس باید $\sqrt{5} \leq [x] \leq \sqrt{30}$ باشد.

گام دوم: $[x]$ عددی صحیح است؛ پس نامساوی بالا را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\sqrt{5} = 2/2, \sqrt{30} = 5/5 \rightarrow 2/2 \leq [x] \leq 5/5 \Rightarrow 3 \leq [x] \leq 5 \Rightarrow 3 \leq x < 6$$

این بازه شامل ۳ عدد صحیح ۳، ۴ و ۵ است.

۱۰ اگر توابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - x^2} + b$ و $g(x) = \{(a, 1), (k, c)\}$ با هم برابر باشند. حاصل $a + b + c + k$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



Hint کافی است شرط تساوی دو تابع را اعمال نمایید، جوابها به راحتی به دست می‌آیند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا دامنه دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - x^2} + b$$

$$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \xrightarrow{\text{جذر}} |x| \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2$$

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \xrightarrow{\text{جذر}} |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$



دامنه تابع f از اشتراک جوابها به دست می‌آید:

$$D_f = \{-2, 2\}$$

حالا دامنه تابع g را به دست می‌آوریم:

$$D_g = \{a, k\}$$

گام دوم: ضابطه تابع f را با دامنه $\{\pm 2\}$ محاسبه می‌کنیم:

$$x = \pm 2 \Rightarrow f(x) = b$$

بنابراین تابع f را می‌توان به صورت $f = \{(2, b), (-2, b)\}$ نوشت.

گام سوم: شرط تساوی دو تابع را برای f و g اعمال می‌کنیم:

$$\text{شرط اول} \Rightarrow D_f = D_g \Rightarrow \{2, -2\} = \{a, k\}$$

$$\text{شرط دوم} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow \{b\} = \{1, c\}$$

گام چهارم: از تساوی $\{b\} = \{1, c\}$ می‌توان نتیجه گرفت که $b = c = 1$ و از تساوی $\{a, k\} = \{+2, -2\}$ می‌توان نتیجه گرفت که $a + k = 0$ است.

گام پنجم: در آخر حاصل $a + b + c + k$ برابر می‌شود با:

$$a + b + c + k = \overbrace{(a + k)}^{\text{صفر}} + b + c = 0 + 1 + 1 = 2$$

تابع خطی $f(x) = ax + b$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x) = (a+b)x + \frac{b^2}{3}$ باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای a چندعضوی است؟

۴ (۲)

۲ (۱)

۶ (۳)

۶ (۳)

از درس پاکس استفاده کن و ضابطه f^{-1} رو به دست بیار، همین!

Hint

درس Box

محاسبه ضابطه تابع وارون

در حالت کلی برای یافتن ضابطه وارون تابع یک به یک $y = f(x)$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(۱) برد تابع f را می‌یابیم: این برد، همان دامنه تابع f^{-1} است.

(۲) از معادله $y = f(x)$ ، x را بر حسب y می‌یابیم.

(۳) در رابطه به دست آمده، x و y را با هم تعویض می‌کنیم.

مثال‌های خاص: در تابع خطی و غیر ثابت $f(x) = ax + b$ ، ضابطه تابع وارون $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ است؛ بنابراین وارون تابع خطی و غیر ثابت، خود یک تابع خطی است؛ ضمناً شیب دو خط عکس هم هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا ضابطه تابع f^{-1} را با همین پارامترهای a و b می‌نویسیم:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

گام دوم: و این ضابطه را با ضابطه مفروض صورت سؤال متحد قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = (a+b)x + \frac{b^2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = a+b & (۱) \\ -\frac{b}{a} = \frac{b^2}{3} & (۲) \end{cases}$$

گام سوم: در دو حالت $b = 0$ و $b \neq 0$ بررسی می‌کنیم:

$$b = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a \in \{-1, 1\}$$

$$b \neq 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{b^2}{3} \xrightarrow{\div b} -\frac{1}{a} = \frac{b}{3} \Rightarrow b = -\frac{3}{a}$$

$$\xrightarrow{(۱)} \frac{1}{a} = a - \frac{3}{a} \Rightarrow a = \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a \in \{-2, 2\}$$

پس a می‌تواند مقادیر مجموعه $\{-2, -1, 1, 2\}$ را بپذیرد.

۱۲ اگر $f(x) = x^2 + \sqrt{5x - x^2} - 4 + 20$ و $g(x) = 8x + \sqrt{5x - x^2} - 4$ باشد، برد تابع $f - g$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱۰ (۲)

۹ (۱)

(۴) بی شمار

۱۱ (۳)



Hint

کافی است با محاسبه دامنه f و g و اشتراک گیری از آن‌ها دامنه تابع $f - g$ را به دست آورید، سپس ضابطه تابع $f - g$ که یک سهمی است را تشکیل داده و در محدوده دامنه، برد آن را محاسبه کنید.

اعمال جبری روی توابع

دستی Box

رسم عمل	نماد	تعریف ریاضی	دامنه
جمع دو تابع	$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_f \cap D_g$
تفریق دو تابع	$f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_f \cap D_g$
ضرب دو تابع	$f \cdot g$	$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_f \cap D_g$
تقسیم دو تابع	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

برای به دست آوردن دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:
 $\sqrt[n]{A} \Rightarrow A \geq 0$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در ابتدا دامنه‌های دو تابع f و g را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + \sqrt{5x - x^2} - 4 + 20 \xrightarrow{\text{عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد}} 5x - x^2 - 4 \geq 0$$

$$\xrightarrow{\times(-)} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) \leq 0 \xrightarrow{\text{بین ۲ ریشه}} 1 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_f = [1, 4]$$

و همین‌طور برای دامنه تابع g که داریم:

$$D_g = [1, 4]$$

گام دوم: از اشتراک دامنه‌های f و g دامنه $f - g$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

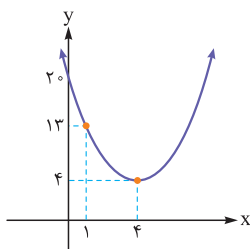
$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = [1, 4]$$

گام سوم: ضابطه تابع $f - g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + \sqrt{5x - x^2} - 4 + 20 - (8x + \sqrt{5x - x^2} - 4) = x^2 - 8x + 20$$

گام چهارم: حال برد تابع $(f - g)(x) = x^2 - 8x + 20$ را در محدوده $x \in [1, 4]$ با استفاده از رسم سهمی به دست می‌آوریم:

$$(f - g)(x) = x^2 - 8x + 20 = (x - 4)^2 + 4$$



گام پنجم: با توجه به نمودار گام چهارم در محدوده $x \in [1, 4]$ برد تابع به صورت $[4, 13]$ است که شامل ۱۰ عدد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۳ است.

۱۳ اگر $f(2^x + x) = 2(x - 1) + 2^{1+x}$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

منظور از $f(2)$ یعنی ورودی ماشین f را ۲ قرار دهید، در این جا ورودی ماشین f ، $2^x + x$ می باشد.

۲ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۶ (۴)

 Hint

کافی است به جای $2^x + x$ قرار دهیم ۲. اصلاً به حل کردن معادله و پیدا کردن x فکر نکنید و بایستی $2^x + x$ را در رابطه داده شده بسازید.

 پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به این که $f(2)$ را می خواهد؛ بنابراین ورودی ماشین f را برابر ۲ قرار می دهیم:

$$2^x + x = 2$$

با توجه به این که پیدا کردن x در معادله فوق پیچیده است؛ بنابراین سعی می کنیم عبارت $2^x + x$ را در تساوی داده شده تشکیل دهیم.

گام دوم: طرف دوم تساوی $f(2^x + x) = 2(x - 1) + 2^{1+x}$ را ساده می کنیم تا $2^x + x$ در آن تشکیل شود:

$$f(2^x + x) = 2x - 2 + 2 \times 2^x = 2(x + 2^x) - 2$$

گام سوم: حالا در تساوی $f(2^x + x) = 2(2^x + x) - 2$ به جای $2^x + x$ قرار می دهیم ۲:

$$f(2) = 2 \times 2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

اگر $f(x) = \sqrt{4-2\sqrt{x}-1}$ باشد، مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $g(x) = (f^{-1} \circ f)(x) + (f \circ f^{-1})(x)$ و محور x ها کدام است؟

۶ (۴)

۳۰ (۳)

۳ (۲)

۱۵ (۱)



Hint

ابتدا دامنه و برد تابع f را به دست آورید. سپس دامنه تابع g را محاسبه و ضابطه آن را تشکیل دهید. سرانجام نمودار تابع g را در محدوده به دست آمده رسم نمایید و مساحت سطح محصور نمودار تابع با محور x ها به راحتی به دست می آید.

درس Box

• اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x ; x \in D_{f^{-1}}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x ; x \in D_f$$

$$D_{f^{-1}} = R_f \text{ (دامنه تابع وارون برابر برد تابع است) و } R_{f^{-1}} = D_f$$

• برای به دست آوردن دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$\sqrt[n]{A} \Rightarrow A \geq 0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در ابتدا دامنه تابع $f(x) = \sqrt{4-2\sqrt{x}-1}$ را محاسبه می کنیم:

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

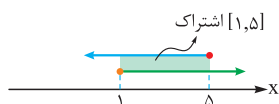
$$\text{برای } \sqrt{x-1}:$$

$$\text{برای } \sqrt{4-2\sqrt{x}-1}:$$

$$4-2\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} \leq 4 \xrightarrow{\div 2} \sqrt{x-1} \leq 2 \xrightarrow{\text{توان } 2} x-1 \leq 4 \Rightarrow x \leq 5$$

از اشتراک جوابها دامنه تابع f حاصل می شود:

$$D_f = [1, 5]$$



گام دوم: با توجه به دامنه تابع f ، برد تابع را به دست می آوریم:

$$D_f = [1, 5] \Rightarrow 1 \leq x \leq 5 \xrightarrow{-1} 0 \leq x-1 \leq 4 \xrightarrow{\text{جذر}} 0 \leq \sqrt{x-1} \leq 2 \xrightarrow{\times (-2)} -4 \leq -2\sqrt{x-1} \leq 0$$

$$\xrightarrow{+4} 0 \leq 4-2\sqrt{x-1} \leq 4 \xrightarrow{\text{جذر}} 0 \leq \sqrt{4-2\sqrt{x-1}} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow R_f = [0, 2]$$

گام سوم: می دانیم دامنه تابع وارون برد تابع f است؛ پس:

$$D_{f^{-1}} = R_f = [0, 2]$$

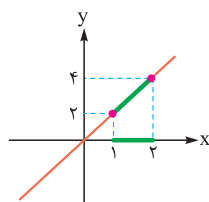
گام چهارم: حالا دامنه تابع g را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f = [0, 2] \\ D_{f^{-1} \circ f} = D_f = [1, 5] \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{طبق درس Box}} D_g = D_{f \circ f^{-1}} \cap D_{f^{-1} \circ f} = [0, 2] \cap [1, 5] = [1, 2]$$

گام پنجم: حالا که دامنه تابع g را به دست آوردیم، ضابطه تابع آن را تشکیل می دهیم:

$$g(x) = (f \circ f^{-1})(x) + (f^{-1} \circ f)(x) = x + x = 2x ; D_g = [1, 2]$$

گام ششم: نمودار تابع $g(x) = 2x$ را در محدوده $[1, 2]$ رسم می کنیم:



سطح بین نمودار و محور x ها یک دوزنقه با قاعده کوچک ۲ و قاعده بزرگ ۴ و ارتفاع یک می باشد؛ بنابراین مساحت آن را می توان

از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$S_{\text{دوزنقه}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع ۲ قاعده}}{۲} = \frac{(۲+۴)(۱)}{۲} = ۳$$

۱۵ اگر $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ باشد، دامنه تابع $y = 2 + 3f(1-x)$ کدام است؟

دامنه تابع $y = 2 + 3f(1-x)$ همان دامنه $y = f(1-x)$ است، زیرا ۲ و ۳ روی دامنه تأثیر نمی‌گذارند.

(۱) $[-5, 3]$

(۲) $[-5, 4]$

(۳) $[-3, 5]$

(۴) $[-4, 5]$



Hint

دستی Box

کافی است دامنه تابع f را حساب کنید و سپس از تعریف دامنه ترکیب تابع، جواب به دست می‌آید.

• برای به دست آوردن دامنه تابع رادیکالی با فرجه زوج، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$\sqrt[n]{A} \Rightarrow A \geq 0$$

• در تبدیل نمودار تابع $y = af(bx+c)+d$ ، a و d روی برد و b و c روی دامنه تأثیر می‌گذارند.

• دامنه ترکیب دو تابع $(f \circ g)$ به صورت زیر است:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا دامنه تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{16-x^2} \xrightarrow{\text{زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر است}} 16-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 16$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x| \leq 4 \xrightarrow{\text{طبق نکته زیر}} -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_f = [-4, 4]$$

اگر $k > 0$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} |x| \leq k \Rightarrow -k \leq x \leq k \\ |x| \geq k \Rightarrow x \geq k \text{ یا } x \leq -k \end{cases}$$

گام دوم: در تبدیل نمودار تابع $y = 2 + 3f(1-x)$ ، اعداد ۲ و ۳ روی دامنه تأثیر نمی‌گذارند؛ بنابراین برای محاسبه دامنه می‌توان آن را نادیده گرفت.

گام سوم: ضابطه $g(x)$ را $1-x$ قرار می‌دهیم و دامنه $f(g(x))$ یا دامنه $f \circ g$ را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{16-x^2}, \quad g(x) = 1-x$$

$$D_f \xrightarrow{\text{گام اول}} = [-4, 4]$$

$$g(x) = 1-x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$\text{طبق تعریف: } D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [-4, 4]\}$$

گام چهارم: حال کافی است نامعادله $-4 \leq g(x) \leq 4$ را حل کنیم:

$$-4 \leq g(x) \leq 4 \Rightarrow -4 \leq 1-x \leq 4 \xrightarrow{-1} -5 \leq -x \leq 3$$

$$\xrightarrow{\text{در منفی ضرب کنید، جهت نامعادله عوض می‌شود. می‌توان نوشت}} -3 \leq x \leq 5$$

گام پنجم: دامنه تابع $y = 2 + 3f(1-x)$ از اشتراک $\mathbb{R}$ و $[-3, 5]$ به دست می‌آید:

$$\mathbb{R} \cap [-3, 5] = [-3, 5]$$

چون بازه‌ها را در گزینه‌ها داریم، می‌توانیم از عددگذاری استفاده کنیم. برای این کار از عددی استفاده می‌کنیم که بین گزینه‌ها اختلاف می‌اندازد؛ مثل $x = -4$ که در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) حضور دارد و در گزینه (۳) حضور ندارد. بیایید $x = -4$ را در تابع جای گذاری کنیم.

$$y = 2 + 3f(1-x) \xrightarrow{x=-4} y = 2 + 3f(5) \xrightarrow{f(x)=\sqrt{16-x^2}} y = 2 + 3\sqrt{16-25} = 2 + 3\sqrt{-9}$$

همان‌طوری که می‌بینید عبارت داخل رادیکال منفی شده؛ پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) برآ؛ بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

تیزبازی

۱۶ اگر $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$ باشد، مجموع جواب‌های معادله $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{1-4x^2}{x-1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{17}$ (۲) $\frac{4}{17}$ (۳) $-\frac{4}{17}$ (۴) $-\frac{9}{17}$



 Hint

در ابتدا ضابطه تابع وارون f را به دست آورید و ضابطه $f^{-1} \circ g(x)$ را تشکیل دهید و آن را مساوی $\frac{1-4x^2}{x-1}$ قرار دهید. پس از حل معادله ریشه‌های معادله به راحتی به دست می‌آیند.

 درس Box

• تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ است را تابع هموگرافیک می‌نامیم، دامنه و برد این تابع به ترتیب برابر $D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ و $R_f = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ است.

• ضابطه وارون تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را می‌توان به صورت $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ به دست آورد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا وارون تابع $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2} \xrightarrow{\text{مطابق درس باکس}} f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$R_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{2\}$$

گام دوم: با داشتن $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$ و $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ ضابطه تابع $f^{-1} \circ g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = \frac{2g(x)-1}{g(x)-1} = \frac{2(\frac{x+1}{x-3})-1}{\frac{x+1}{x-3}-1} = \frac{x+5}{4}$$

گام سوم: ضابطه تابع $f^{-1} \circ g$ را مساوی $\frac{1-4x^2}{x-1}$ قرار می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم تا ریشه‌های آن را به دست آوریم:

$$\frac{x+5}{4} = \frac{1-4x^2}{x-1} \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 4 - 16x^2 \Rightarrow 17x^2 + 4x - 9 = 0$$

گام چهارم: در نتیجه مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{4}{17}$$



بزرگ‌ترین بازه‌ای که روی آن تابع $f(x) = x(|x| - ||x| - 2| - 2)$ یک‌به‌یک است، به صورت $[a, b]$ است. ضابطه تابع وارون این تابع در بازه $[a, b]$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x} \left(\sqrt{1 - \frac{|x|}{2}} - 1 \right); |x| \leq 1 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x} \left(\sqrt{1 - \frac{|x|}{2}} - 1 \right); |x| \leq 2 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x} \left(\sqrt{1 + \frac{|x|}{2}} - 1 \right); |x| \leq 1 \quad (3)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x} \left(\sqrt{1 + \frac{|x|}{2}} - 1 \right); |x| \leq 2 \quad (4)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ریشه‌های داخل عبارت‌های قدرمطلق صفر و ± 2 هستند، پس براساس این ریشه‌ها ضابطه تابع f را می‌نویسیم:

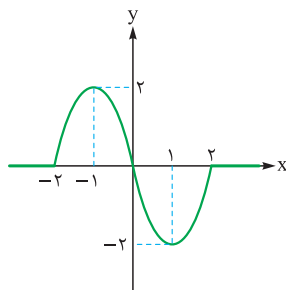
$$|x| - ||x| - 2| - 2 = \begin{cases} 0 & ; x < -2 \\ -2x - 4 & ; -2 \leq x < 0 \\ 2x - 4 & ; 0 \leq x < 2 \\ 0 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < -2 \\ -2x^2 - 4x & ; -2 \leq x < 0 \\ 2x^2 - 4x & ; 0 \leq x < 2 \\ 0 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

گام دوم: ضابطه‌های تابع f را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < -2 \\ -2(x+1)^2 + 2 & ; -2 \leq x < 0 \\ 2(x-1)^2 - 2 & ; 0 \leq x < 2 \\ 0 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

و نمودار این تابع به صورت زیر است:



گام سوم: بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن یک‌به‌یک است، بازه $[-1, 1]$ است که برد تابع در این بازه برابر $[-2, 2]$ است.

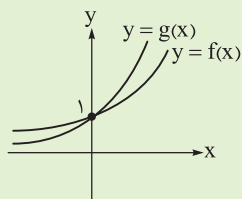
ضابطه تابع f^{-1} در این بازه به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 1 - \sqrt{1 + \frac{x}{2}} & ; -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

گام چهارم: که اگر ضابطه‌ها را به صورت واحد بنویسیم، داریم:

$$f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x} \left(\sqrt{1 - \frac{|x|}{2}} - 1 \right)$$

نمودار دو تابع نمایی f و g با ضابطه‌های $f(x) = (5-m)^x$ و $g(x) = (2m-3)^x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. اگر مجموعه مقادیر قابل قبول برای m بازه (a, b) باشد، حاصل $b-3a$ کدام است؟



$\frac{4}{3}$ (۱)

۴ (۲)

-۴ (۳)

$-\frac{4}{3}$ (۴)



کافی است شرط نمایی بودن f و g را به طور دقیق لحاظ نمایید تا بازه قابل قبول m به دست آید.

Hint

درس Box

هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ که در آن $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

در تابع $f(x) = a^x$:

اگر $a > 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر تابع f افزایش می‌یابند.

اگر $0 < a < 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر تابع f کاهش می‌یابند.

برای $f(x) = a^x$ و $g(x) = b^x$ با شرط $b > a > 1$ داریم:

اگر $x > 0$ ، آن‌گاه $g(x)$ بالاتر از $f(x)$ قرار می‌گیرد: $(b^x > a^x)$.

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $g(x)$ پایین‌تر از $f(x)$ قرار می‌گیرد: $(b^x < a^x)$.

برای مثال: اگر $x > 0$ ، آن‌گاه $3^x > 2^x$.

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $3^x < 2^x$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** با توجه به نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ هر دو تابع نمایی افزایشی‌اند؛ بنابراین پایه آن‌ها باید بزرگ‌تر از یک باشد.

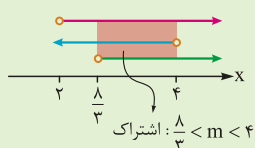
$$f(x) = (5-m)^x \xrightarrow[\text{پایه} > 1]{\text{نمایی افزایشی است}} 5-m > 1 \Rightarrow m < 4 \quad (1)$$

$$g(x) = (2m-3)^x \xrightarrow[\text{پایه} > 1]{\text{نمایی افزایشی است}} 2m-3 > 1 \Rightarrow m > 2 \quad (2)$$

گام دوم: مطابق شکل، برای $x > 0$ نمودار $g(x)$ بالاتر از $f(x)$ قرار دارد؛ در نتیجه داریم:

$$g(x) > f(x) \Rightarrow (2m-3)^x > (5-m)^x \xrightarrow{\text{چون } f \text{ و } g \text{ نمایی افزایشی‌اند}} 2m-3 > 5-m \Rightarrow 3m > 8$$

$$\Rightarrow m > \frac{8}{3} \quad (3)$$



گام سوم: از جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم:

گام چهارم: جواب به دست آمده برای m به صورت $m \in (\frac{8}{3}, 4)$ است که در آن $a = \frac{8}{3}$ و $b = 4$ ؛ بنابراین مقدار $b-3a$ برابر

می‌شود با:

$$b-3a = 4-3(\frac{8}{3}) = 4-8 = -4$$

نمودار تابع $f(x) = 2^{x+b} + a$ از نقاط $(1, 2)$ و $(2, 3)$ می‌گذرد. مقدار $f(3)$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)



Hint

کافی است نقاط $(1, 2)$ و $(2, 3)$ را در تابع قرار دهید. با حل دستگاه حاصل، مقادیر a و b به دست می‌آید. با نوشتن ضابطه تابع محاسبه $f(3)$ بسیار ساده است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع $f(x) = 2^{x+b} + a$ از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$2 = 2^{1+b} + a \Rightarrow 2 = 2 \times 2^b + a \quad (I)$$

گام دوم: تابع $f(x) = 2^{x+b} + a$ از نقطه $(2, 3)$ می‌گذرد؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$3 = 2^{2+b} + a \Rightarrow 3 = 2^2 \times 2^b + a \Rightarrow 3 = 4 \times 2^b + a \quad (II)$$

گام سوم: حالا با حل دستگاه حاصل از روابط (I) و (II) مقدار a و b را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2 \times 2^b + a = 2 \\ 4 \times 2^b + a = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالایی - پایینی}} 4 \times 2^b - 2 \times 2^b = 1$$

$$\Rightarrow 2 \times 2^b = 1 \Rightarrow 2^b = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow b = -1$$

با جای‌گذاری $b = -1$ در $4 \times 2^b + a = 3$ ، به دست می‌آید:

$$4 \times 2^{-1} + a = 3 \Rightarrow 2 + a = 3 \Rightarrow a = 1$$

گام چهارم: بنابراین ضابطه تابع به صورت زیر می‌شود:

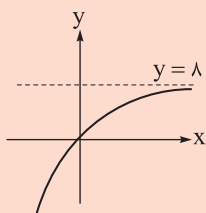
$$f(x) = 2^{x-1} + 1$$

مقدار $f(3)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(3) = 2^{3-1} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

نمودار تابع $f(x) = c - 2^{ax+b}$ در زیر رسم شده است. اگر فاصله نقطه‌ای به طول $-\frac{1}{2}$ روی نمودار تابع f از خط $y = 8$ ، دو برابر

فاصله آن تا محور x ها باشد، مقدار $f(a+b)$ کدام است؟



قدر مطلق عرض نقطه

۶ (۲)

-۱۲۰ (۴)

۷/۵ (۱)

-۲۴ (۳)



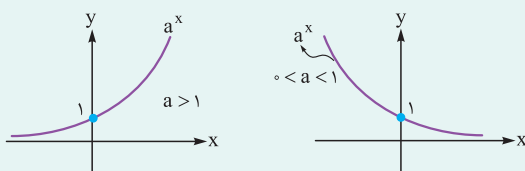
Hint

ابتدا نقطه $(0, 8)$ و $(+\infty, 0)$ را در تابع قرار دهید تا مقدار b و c را به دست آورید، سپس فاصله نقطه A از خط $y = 8$ را دو برابر فاصله نقطه A تا خط $y = 0$ (محور x ها) قرار دهید تا مقدار a هم حاصل شود. حالا ضابطه تابع را داریم و محاسبه $f(a+b)$ بسیار ساده است.

درس Box

تابع نمایی: هر تابعی را که بتوان به فرم $y = a^x$ با شرط $a > 0$ و $a \neq 1$ نوشت تابع نمایی است.

در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > 1$ ، تابع نمایی افزایشی و $0 < a < 1$ ، تابع نمایی کاهشی است و نمودار آن مطابق شکل زیر است:



در تابع نمایی $y = c + ka^{bx+d}$ خط $y = c$ مجانب - همان خط چین - افقی تابع است. (یعنی تابع در بی‌نهایت به سمت $y = c$ میل می‌کند).

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در تابع $f(x) = c - 2^{ax+b}$ ، طبق نمودار خط $y = 8$ مجانب افقی است (در بی‌نهایت تابع f به سمت 8 میل می‌کند)؛

در نتیجه $c = 8$ است.

گام دوم: تابع $f(x) = 8 - 2^{ax+b}$ از نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$8 - 2^b = 0 \Rightarrow 2^b = 8 = 2^3 \Rightarrow b = 3$$

گام سوم: نقطه A به طول $-\frac{1}{2}$ روی نمودار تابع f قرار دارد؛ بنابراین مختصات نقطه A را می‌توان به صورت $A(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ نوشت. با توجه به نمودار مقدار $y_A = f(-\frac{1}{2})$ منفی است.

گام چهارم: فاصله نقطه A از خط $y = 8$ و خط $y = 0$ (محور x ها) را حساب می‌کنیم:

$$\text{طبق نکته پایین} \quad \text{فاصله نقطه } A \text{ از خط } y = 8 \xrightarrow{y_A < 0} = 8 - y_A$$

$$\text{طبق نکته پایین} \quad \text{فاصله نقطه } A \text{ از خط } y = 0 \text{ (محور } x \text{ها)} \xrightarrow{y_A < 0} = -y_A$$

فاصله نقطه A از خط $y = k$ برابر است با: $|k - y_0|$

نکته

گام پنجم: فاصله نقطه A از خط $y = 8$ را دو برابر فاصله آن تا خط $y = 0$ (محور x ها) قرار می‌دهیم:

$$8 - y_A = 2(-y_A) \Rightarrow y_A = -8 \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) = -8$$

گام ششم: از تساوی $f(-\frac{1}{2}) = -8$ می‌توان a را به دست آورد:

$$f(x) = 8 - 2^{ax+3} \xrightarrow{f(-\frac{1}{2}) = -8} -8 = 8 - 2^{-\frac{a}{2}+3} \Rightarrow 2^{-\frac{a}{2}+3} = 16 = 2^4$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{2} + 3 = 4 \Rightarrow a = -2$$

گام هفتم: بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = 8 - 2^{-2x+3}$ می‌شود.

مقدار $f(a+b) = f(-2+3) = f(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(a+b) = f(1) = 8 - 2^{-2(1)+3} = 8 - 2^1 = 8 - 2 = 6$$

۲۱ در کدام یک از تبدیل‌های زیر، جهت شکل حفظ نمی‌شود؟

- (۲) انتقال
(۴) دوران ۱۸°

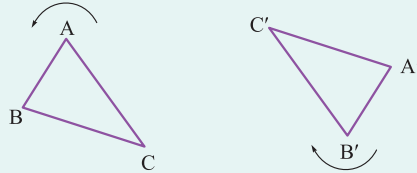
- (۱) بازتاب
(۳) دوران ۹۰°

مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل مرحله اول ۱۴۰۳ طرح شده است.

Hint

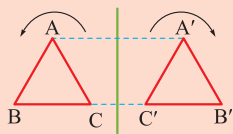
درتس Box

جهت شکل در تبدیل‌های هندسی

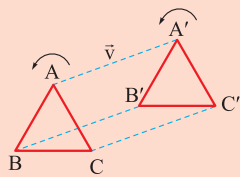


فرض کنید تحت تبدیل هندسی T ، مثلث ABC بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شده باشد. در مثلث ABC ، ترتیب قرار گرفتن نقاط A ، B و C به صورت پادساعتگرد (در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) است، اما در مثلث $A'B'C'$ ، ترتیب قرار گرفتن نقاط A' ، B' و C' یعنی تصاویر نقاط A ، B و C تحت تبدیل T ، به صورت ساعتگرد (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) است. در این صورت می‌گوییم جهت شکل تحت تبدیل T عوض شده است.

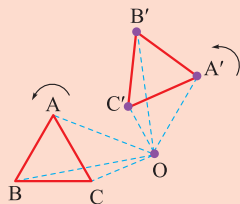
گزینه‌ها را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم:



گزینه (۱): نقاط A ، B و C و به صورت پادساعتگرد قرار گرفته‌اند، ولی تصاویر آن‌ها تحت بازتاب جهت نسبت به خط d ، یعنی نقاط A' ، B' و C' به صورت ساعتگرد هستند، پس تحت بازتاب، جهت شکل عوض می‌شود.

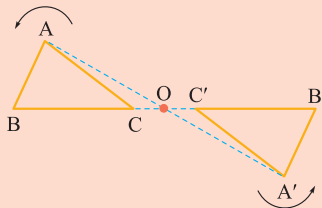


گزینه (۲): هم نقاط A ، B و C و هم تصاویر آن‌ها تحت انتقال با بردار $\vec{V}$ ، یعنی نقاط A' ، B' و C' به صورت پادساعتگرد قرار گرفته‌اند، پس تحت انتقال، جهت شکل عوض نمی‌شود.



گزینه (۳): هم نقاط A ، B و C و هم تصاویر آن‌ها تحت دوران ۹۰° حول نقطه O ، یعنی نقاط A' ، B' و C' به صورت پادساعتگرد قرار گرفته‌اند.

گزینه (۴): هم نقاط A ، B و C و هم تصاویر آن‌ها تحت دوران ۱۸° حول نقطه O ، یعنی نقاط A' ، B' و C' به صورت پادساعتگرد قرار گرفته‌اند.



با توجه به گزینه‌های (۳) و (۴)، تحت دوران، جهت شکل عوض نمی‌شود.

ممکن است برداشت اشتباهی از جهت شکل صورت بگیرد و به نوعی قرارگیری شکل نسبت به محورهای مختصات به جای ترتیب ساعتگرد یا پادساعتگرد بودن رأس‌ها در نظر گرفته شود و در این صورت چون در دوران ۱۸° ، شکل به نوعی برعکس می‌شود، گزینه «۴» به اشتباه انتخاب گردد.

گول نخوری

اگر پاره‌خط $A'B'$ دوران یافته پاره‌خط AB به مرکز نقطه‌ای غیر واقع بر AB (و یا امتداد آن) باشد، مرکز دوران کدام است؟
(A' و B' به ترتیب دوران یافته A و B هستند.)

(۱) محل تلاقی AB و $A'B'$

(۲) محل تلاقی عمودمنصف‌های AB و $A'B'$

(۳) محل تلاقی عمودمنصف‌های AA' و BB'

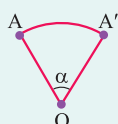


مشاوره این سؤال براساس تمرین ۳ صفحه ۴۲ کتاب درسی هندسه (۲) طرح شده است که به روش پیدا کردن مرکز دوران در صورت داشتن یک شکل و تصویر آن تحت دوران می‌پردازد.

Hint

درسی Box

دوران:



دوران به مرکز O و زاویه α تبدیلی است که در آن نقطه A بر نقطه A' تصویر می‌شود، به طوری که:
 $OA = OA'$ و $\angle AOA' = \alpha$

مهم‌ترین ویژگی‌های دوران عبارت‌اند از:

(۱) دوران یک تبدیل طولپا است.

(۲) دوران اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

(۳) دوران در حالت کلی شیب خط‌ها را حفظ نمی‌کند. (مگر این‌که زاویه دوران مضربی از 180° باشد.)

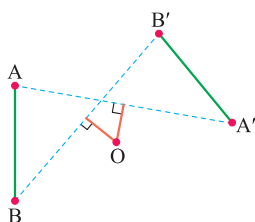
(۴) دوران جهت شکل‌ها را حفظ می‌کند.

هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

نکته

گام اول: فرض کنید نقطه O مرکز دوران باشد. در این صورت $OA = OA'$ و $OB = OB'$ است؛ یعنی A و A' از O به یک فاصله و به طور مشابه B و B' هم از O به یک فاصله هستند.

گام دوم: با توجه به توضیحات گام اول، O روی عمودمنصف AA' و نیز روی عمودمنصف BB' قرار دارد، پس O محل تلاقی عمودمنصف‌های دو پاره‌خط AA' و BB' است.



پاسخ خیلی تشریحی



نقطه A' تصویر نقطه A تحت بازتاب نسبت به خط d و O نقطه‌ای روی خط d است. اگر $AA' = 12$ و فاصله نقطه A از پاره خط OA' برابر $9/6$ باشد، فاصله نقطه O از پاره خط AA' کدام است؟

۸ (۲)

۶ (۱)

۱۰ (۴)

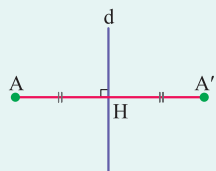
۹ (۳)

مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۷ صفحه ۴۳ کتاب درسی هندسه ۲ طرح شده است. حل این سؤال را برای امتحان نهایی به طور کامل به یاد داشته باشید.



حاصل ضرب طول هر ضلع در طول ارتفاع وارد بر آن ضلع در یک مثلث، مقدار یکسانی است.

بازتاب:



نقطه A' را بازتاب نقطه A نسبت به خط d گویند، هرگاه d عمود منصف پاره خط AA' باشد. خط d را محور بازتاب می‌گویند و در صورتی که نقطه A روی محور بازتاب باشد، تصویر A بر خود A منطبق می‌شود.

مهم‌ترین ویژگی‌های بازتاب عبارتند از:

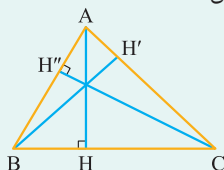
(۱) بازتاب یک تبدیل طولی است.

(۲) بازتاب اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

(۳) بازتاب جهت شکل‌ها را حفظ نمی‌کند.

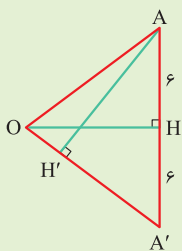
(۴) بازتاب در حالت کلی شیب خط‌ها را حفظ نمی‌کند. (مگر این‌که محور بازتاب موازی با خط یا عمود بر خط باشد).

حاصل ضرب طول هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن ضلع در یک مثلث، مقداری ثابت و دو برابر مساحت آن مثلث است.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} BH' \times AC = \frac{1}{2} CH'' \times AB \Rightarrow a \times h_a = b \times h_b = c \times h_c = 2S$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** شکل مسئله را رسم می‌کنیم. مطابق شکل اگر $OH = x$ فرض شود، آن‌گاه طبق قضیه فیثاغورس در مثلث $OA'H$ داریم:



$$OA'^2 = OH^2 + A'H^2 \Rightarrow OA'^2 = x^2 + 36 \Rightarrow OA' = \sqrt{x^2 + 36}$$

گام دوم: در مثلث OAA' ، OH ارتفاع وارد بر ضلع AA' و AH' ارتفاع وارد بر ضلع OA' است؛ بنابراین طبق نکته بالا داریم:

$$OH \times AA' = AH' \times OA' \Rightarrow x \times 12 = 9/6 \times \sqrt{x^2 + 36} \xrightarrow{\div 1/2} 10x = 8\sqrt{x^2 + 36}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 100x^2 = 64(x^2 + 36) = 64x^2 + 64 \times 36 \Rightarrow 36x^2 = 64 \times 36 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

دایره $C(O, a-1)$ را با بردار انتقال $\vec{V}$ بر دایره $C'(O', 1-a)$ تصویر می‌کنیم. اگر طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر $2\sqrt{7}$ باشد، طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

(۲) $3\sqrt{5}$

(۱) ۶

(۴) ۸

(۳) $4\sqrt{3}$

مشاوره سؤالات ترکیبی انواع تبدیل‌ها با مباحث مختلف فصل دایره به ویژه مماس مشترک دو دایره از سؤالات مورد توجه در آزمون‌های تستی است و امکان طرح چنین سؤالاتی در امتحان نهایی نیز وجود دارد.

Hint

درسی Box

انتقال:



انتقال T تحت بردار $\vec{V}$ ، تبدیلی است که در آن تصویر هر نقطه مانند A از صفحه P ، نقطه‌ای مانند B از همین صفحه است، به طوری که $\vec{AB} = \vec{V}$ باشد.

مهم‌ترین ویژگی‌های انتقال عبارت‌اند از:

(۱) انتقال، تبدیلی طولپاست.

(۲) انتقال، شیب خط‌ها را حفظ می‌کند.

(۳) انتقال، اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

(۴) انتقال، جهت شکل‌ها را حفظ می‌کند.

(۵) بردارهایی که هر نقطه از شکل را به تصویر آن تحت انتقال وصل می‌کنند، همگی با هم برابرند.

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با طول خط‌المركزين $OO' = d$ را در نظر بگیرید. طول‌های مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

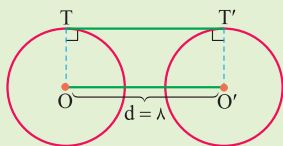
پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** انتقال تبدیلی طولپاست، پس شعاع دایره تحت انتقال تغییری نمی‌کند و در نتیجه داریم:

$$R = R' \Rightarrow a - 1 = 1 - a \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow R = R' = 1$$

گام دوم: به کمک فرمول طول مماس مشترک داخلی، طول خط‌المركزين دو دایره (طول بردار انتقال) را پیدا می‌کنیم:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \Rightarrow 2\sqrt{7} = \sqrt{d^2 - (1 + 1)^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 28 = d^2 - 4 \Rightarrow d^2 = 32 \Rightarrow d = 4\sqrt{2}$$

گام سوم: طول مماس مشترک خارجی دو دایره C و C' که شعاع‌های آن‌ها برابر یکدیگر باشد، برابر طول خط‌المركزين دو دایره، یعنی برابر ۸ است.



شعاع‌های دو دایره مماس داخل برابر $2x$ و $3x+1$ هستند. اگر طول خط‌المركزین این دو دایره برابر $2x-1$ باشد، اندازه شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۷

مشاوره رابطه بین اندازه شعاع‌های دو دایره و طول خط‌المركزین در حالت‌های مختلف دو دایره به طور مستقیم یا غیرمستقیم (مثلاً در مسائل مربوط به طول مماس مشترک‌ها) در بخش زیادی از مسائل دایره در پایه‌های یازدهم و دوازدهم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

Hint

درسی Box

کافی است شرط مماس داخل بودن دو دایره (رابطه بین اندازه شعاع‌ها و طول خط‌المركزین) را بنویسید.

حالت‌های مختلف دو دایره

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با طول خط‌المركزین $OO' = d$ را در نظر بگیرید.

(۱) اگر $d > R + R'$ باشد، دو دایره متخارج‌اند.

(۲) اگر $d = R + R'$ باشد، دو دایره مماس خارج‌اند.

(۳) اگر $|R - R'| < d < R + R'$ باشد، دو دایره متقاطع‌اند.

(۴) اگر $d = |R - R'|$ باشد، دو دایره مماس داخلی‌اند.

(۵) اگر $d < |R - R'|$ باشد، دو دایره متداخل‌اند.

(۶) اگر $d = 0$ باشد، دو دایره هم‌مرکزند.

گام اول: اندازه شعاع‌های دو دایره و طول خط‌المركزین مقادیری مثبت هستند؛ در نتیجه داریم:

$$3x > 2x \Rightarrow 3x + 1 > 2x$$

بنابراین شعاع دایره بزرگ‌تر، برابر $3x+1$ و شعاع دایره کوچک‌تر، برابر $2x$ است.

گام دوم: دو دایره مماس داخل هستند، پس داریم:

$$d = |R - R'| \Rightarrow 2x - 1 = |(3x + 1) - 2x| \Rightarrow 2x - 1 = |x + 1| \xrightarrow{x+1 > 0} 2x - 1 = x + 1 \Rightarrow x = 2$$

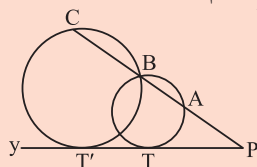
$$2x = 2 \times 2 = 4$$

گام سوم: شعاع دایره کوچک‌تر برابر است با:

پاسخ خیلی تشریحی

مشاوره سؤالات مربوط به مبحث روابط طولی در دایره، بخش مهمی از سؤالات فصل دایره در کنکور را به خود اختصاص داده‌اند و از جمله سؤالی از این موضوع در کنکور مرحله اول ۱۴۰۳ طرح شده است.

در شکل زیر دو دایره در نقاط T و T' بر نیم خط Py مماس هستند و $PT = ۳TT'$. حاصل $\frac{PC}{PA}$ کدام است؟



۲ (۲)

۴ (۴)

۴ (۱)

۱۶ (۳)



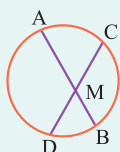
برای هر کدام از دو دایره، رابطه طولی بین مماس و قاطع را بنویسید.

Hint

دستی Box

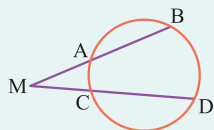
روابط طولی در دایره

(۱) اگر دو وتر AB و CD در نقطه M درون دایره متقاطع باشند، آن گاه داریم:



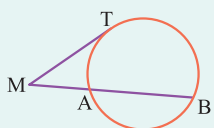
$$MA \times MB = MC \times MD$$

(۲) اگر امتداد دو وتر AB و CD در نقطه M بیرون دایره متقاطع باشد، آن گاه داریم:



$$MA \times MB = MC \times MD$$

(۳) اگر از نقطه M بیرون دایره، مماس MT و قاطع MAB نسبت به دایره رسم شده باشد، آن گاه داریم:



$$MT^2 = MA \times MB$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** اول فرض کنید $TT' = x$ باشد، در این صورت $PT = ۳x$ و $PT' = ۴x$ است. رابطه طولی مماس و قاطع را برای

دایره کوچک تر می نویسیم:

$$PT^2 = PA \times PB \Rightarrow PA \times PB = (۳x)^2 = ۹x^2$$

گام دوم: رابطه طولی مماس و قاطع را برای دایره بزرگ تر می نویسیم:

$$PT'^2 = PB \times PC \Rightarrow PB \times PC = (۴x)^2 = ۱۶x^2$$

گام سوم: طرفین رابطه های به دست آمده در گام های اول و دوم را بر هم تقسیم می کنیم:

$$\frac{PB \times PC}{PA \times PB} = \frac{۱۶x^2}{۹x^2} \Rightarrow \frac{PC}{PA} = \frac{۱۶}{۹}$$

در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، I مرکز دایره محاطی داخلی و I_a مرکز دایره محاطی خارجی است. نسبت مساحت مثلث BIC به

BI_aC کدام است؟

(۲) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{1}{4}$

(۱) ۱

(۳) $\frac{1}{3}$

مشاوره فرمول‌های شعاع دایره محاطی داخلی و دایره‌های محاطی خارجی مثلث از روابط پرکاربرد فصل دایره محسوب می‌شوند و در سؤالات ترکیبی فصل سوم کتاب هندسه ۲ (روابط طولی در مثلث) نیز حضور چشمگیری دارند.

Hint

کرتی Box

به یکسان بودن قاعده‌های دو مثلث دقت کنید.

شعاع دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث

اگر S و P به ترتیب مساحت و نصف محیط مثلث ABC باشند، آن‌گاه:

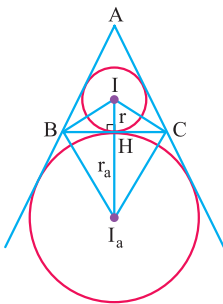
(۱) شعاع دایره محاطی داخلی مثلث از رابطه $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید.

(۲) شعاع دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع به طول a از رابطه $r_a = \frac{S}{P-a}$ به دست می‌آید.

(۳) رابطه زیر بین شعاع دایره محاطی داخلی و شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلث برقرار است:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

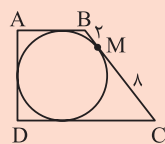
گام اول: دو مثلث BIC و BI_aC در قاعده BC مشترک‌اند و نقطه تماس دو دایره محاطی داخلی و محاطی خارجی نظیر ضلع BC با ضلع BC ، بر یکدیگر منطبق است (نقطه H). ارتفاع نظیر این قاعده مشترک در این دو مثلث، همان شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی و خارجی است.



گام دوم: نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر است با:

$$\frac{S_{BIC}}{S_{BI_aC}} = \frac{\frac{1}{2} r \times a}{\frac{1}{2} r_a \times a} = \frac{r}{r_a} = \frac{\frac{S}{P}}{\frac{S}{P-a}} = \frac{P-a}{P} = \frac{\frac{3}{2}a - a}{\frac{3}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{1}{3}$$

در دوزنقه قائم‌الزاویه شکل زیر، نقطه تماس دایره محاطی دوزنقه با یکی از ساق‌ها، آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۲ و ۸ تقسیم کرده



۲ / ۵

۹ (۴)

۶ (۱)

۸ (۳)

است. طول ارتفاع این دوزنقه کدام است؟

طول قطر دایره محاطی دوزنقه

مشاوره سؤالات مربوط به دایره محاطی دوزنقه از سؤالات پرتکرار کنکور محسوب می‌شوند و از جمله در کنکور ریاضی داخل و خارج ۱۴۰۱ و مرحله اول ۱۴۰۲ سؤالی از این مبحث طراحی شده است.

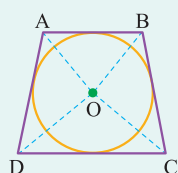
Hint

درس‌Box

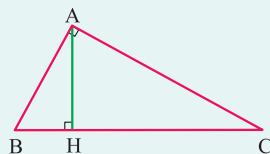
چندضلعی محیطی

یک چندضلعی محیطی نامیده می‌شود هرگاه دایره‌ای وجود داشته باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را دایره محاطی این چندضلعی می‌نامیم.

یک چندضلعی محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چندضلعی است.



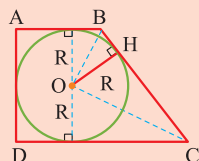
در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی دو قطعه‌ای است که ارتفاع بر روی وتر پدید می‌آورد، یعنی اگر AH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه ABC باشد، آن‌گاه داریم:



$$AH^2 = BH \times CH$$

نکته

گام اول: مرکز دایره محاطی دوزنقه، نقطه هم‌رسی نیمسازهای دوزنقه است، پس ابتدا مطابق شکل، نیمسازهای داخلی زوایای B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند.



با توجه به این‌که زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ (زوایای مجاور به یک ساق) مکمل یکدیگرند، پس مجموع زوایای $\hat{OBC}$ و $\hat{OCB}$ برابر 90° است و در نتیجه $\hat{O} = 90^\circ$ و مثلث OBC قائم‌الزاویه است.

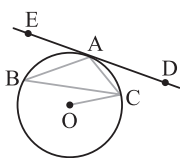
گام دوم: می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس بر دایره، در نقطه تماس بر این خط عمود است؛ پس شعاع OH، ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه OBC است و در نتیجه طبق روابط طولی در این مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$OH^2 = BH \times CH \Rightarrow R^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow R = 4$$

گام سوم: طول ارتفاع دوزنقه برابر طول ضلع AD و دو برابر شعاع دایره محاطی دوزنقه است، پس طول ارتفاع دوزنقه برابر است با: $2 \times 4 = 8$

در شکل زیر، O مرکز دایره است و خط گذرنده از نقاط D و E بر دایره مماس است. اگر $\hat{BCO} = 15^\circ$ و $\hat{CAD} = 25^\circ$

باشد، اندازه زاویه EAB چند درجه است؟



۴۵ (۲)

۵۵ (۴)

۴۰ (۱)

۵۰ (۳)

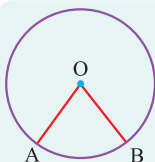
مشاوره سؤالات مبحث زاویه‌ها در دایره از سؤالات تقریباً ثابت در کنکور محسوب می‌شوند و زاویه‌های محاطی و ظلّی معمولاً پایه و اساس این دسته از سؤالات را تشکیل می‌دهند.

Hint

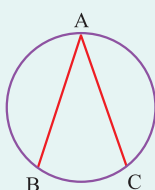
درس‌Box

به کمک زاویه مرکزی $\hat{BOC}$ اندازه کمان $\widehat{BAC}$ را تعیین کنید.

زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره قرار دارد و اضلاع آن دو شعاع از دایره هستند. اندازه هر زاویه مرکزی برابر اندازه کمان روبه‌رو به آن است.

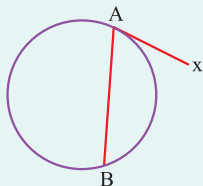


$$\hat{AOB} = \widehat{AB}$$



زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و اضلاع آن دو وتر از دایره هستند. اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف اندازه کمان روبه‌رو به آن است.

$$\hat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

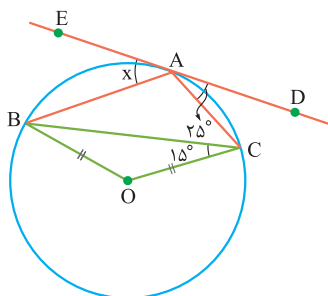


$$\hat{BAx} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

زاویه ظلّی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن وتر از دایره است. اندازه هر زاویه ظلّی برابر نصف اندازه کمان روبه‌رو به آن است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: شعاع OB را رسم می‌کنیم. مثلث OBC متساوی‌الساقین است و داریم:



$$\hat{OBC} = \hat{OCB} = 15^\circ$$

$$\hat{BOC} = 180^\circ - (15^\circ + 15^\circ) = 150^\circ$$

زاویه $\hat{BOC}$ زاویه مرکزی است؛ پس داریم:

$$\widehat{BAC} = \hat{BOC} = 150^\circ$$

$$\hat{CAD} = \frac{\widehat{AC}}{2} = 25^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 50^\circ$$

گام دوم: زاویه‌های $\hat{CAD}$ و $\hat{EAB}$ ، زوایای ظلّی هستند؛ بنابراین داریم:

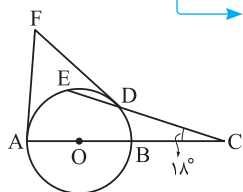
$$\widehat{AB} = \widehat{BAC} - \widehat{AC} = 150^\circ - 50^\circ = 100^\circ$$

$$\hat{EAB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

۳۰

در شکل زیر O مرکز دایره است و FA و FD بر دایره مماس‌اند. اگر طول وتر DE برابر شعاع دایره باشد و امتداد AB و DE در نقطه C متقاطع باشند، اندازه زاویه F چند درجه است؟

اندازه کمان $\widehat{DE}$ برابر 60° است



۳۸ (۲)

۳۶ (۱)

۴۲ (۴)

۴۰ (۳)

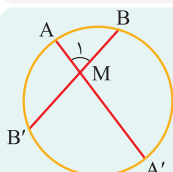


اگر طول وتر DE برابر شعاع دایره باشد، اندازه کمان متناظر با آن وتر برابر 60° است.

Hint

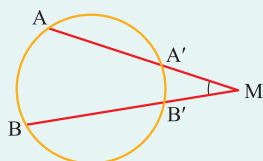
دکتر Box

زاویه بین دو وتر:



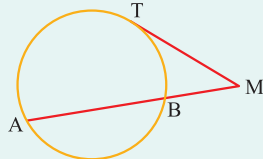
$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2}$$

زاویه بین امتداد دو وتر:



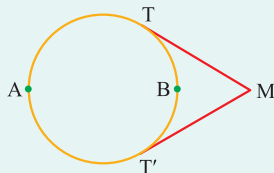
$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2}$$

زاویه بین امتداد وتر و مماس:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2}$$

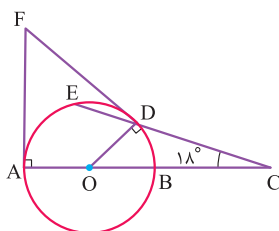
زاویه بین دو مماس:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{TAT'} - \widehat{TBT'}}{2}$$

گام اول: بنا به فرض طول وتر DE با شعاع دایره برابر است، پس اندازه کمان $\widehat{DE}$ برابر 60° است.

است. برای زاویه بین امتداد دو وتر AB و DE داریم:



$$\hat{C} = \frac{\widehat{AE} - \widehat{BD}}{2} = 18^\circ \Rightarrow \widehat{AE} - \widehat{BD} = 36^\circ \quad (1)$$

گام دوم: AB قطر دایره است؛ بنابراین داریم:

$$\widehat{AE} + \widehat{DE} + \widehat{BD} = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{DE} = 60^\circ} \widehat{AE} + \widehat{BD} = 120^\circ \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AE} - \widehat{BD} = 36^\circ \\ \widehat{AE} + \widehat{BD} = 120^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AE} = 78^\circ \\ \widehat{BD} = 42^\circ \end{cases}$$

$$\widehat{AED} = \widehat{AE} + \widehat{DE} = 78^\circ + 60^\circ = 138^\circ$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{AB} + \widehat{BD} = 180^\circ + 42^\circ = 222^\circ$$

$$\hat{F} = \frac{\widehat{ABD} - \widehat{AED}}{2} = \frac{222^\circ - 138^\circ}{2} = \frac{84}{2} = 42^\circ$$

گام سوم: با توجه به مقادیر به دست آمده در گام دوم داریم:

زاویه F، زاویه بین مماس‌های FA و FD است:

۳۱ کدام یک از گزاره‌های زیر باشد تا ارزش گزاره $s \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)] \vee s$ همواره درست باشد؟

(۲) $(p \wedge q) \wedge \sim r$

(۱) $(p \wedge q) \wedge r$

(۴) $(\sim p \wedge q) \wedge r$

(۳) $(p \wedge \sim q) \wedge r$

جبر گزاره‌ها

درباره Box

(۱) نقیض یک گزاره: نقیض گزاره p را $\sim p$ نمایش می‌دهیم و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم.

(۱) اگر ارزش p درست باشد، ارزش $\sim p$ نادرست است و برعکس:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

(۲) ارزش نقیض نقیض یک گزاره، با ارزش خود گزاره یکسان است:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

(۳) ترکیب‌های فصلی و عطفی دو گزاره: اگر دو گزاره را با حرف ربط «یا» به هم مرتبط کنیم، ترکیب فصلی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم « p یا q » و می‌نویسیم « $p \vee q$ ».

اگر دو گزاره را با حرف ربط «و» به هم مرتبط کنیم، ترکیب عطفی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم « p و q » و می‌نویسیم « $p \wedge q$ ».

ارزش $p \vee q$ زمانی درست است که ارزش دست کم یکی از دو گزاره p یا q درست باشد و ارزش $p \wedge q$ زمانی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن

$p \wedge T \equiv p$	$p \wedge F \equiv F$	$p \wedge \sim p \equiv F$
$p \vee T \equiv T$	$p \vee F \equiv p$	$p \vee \sim p \equiv T$

(۴) ترکیب شرطی دو گزاره: به گزاره $p \Rightarrow q$ ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت «اگر p آن‌گاه q » می‌خوانیم. ارزش یک گزاره شرطی تنها در حالتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

(۱) در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، به p «مقدم» یا «فرض» و به q «تالی» یا «حکم» می‌گوییم.

(۲) گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ را به دو صورت زیر نیز می‌خوانیم:

q شرط لازم است برای p

p شرط کافی است برای q



درباره Box



۳) اگر $p \Rightarrow q$ یک گزاره شرطی باشد:

به $q \Rightarrow p$ عکس گزاره شرطی می‌گوییم؛

به $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض گزاره شرطی می‌گوییم (که با $p \Rightarrow q$ هم‌ارزش است؛ یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow q$)؛

و به $(q \Rightarrow p) \sim$ نقیض عکس گزاره شرطی می‌گوییم.

۴) **انتفای مقدم:** در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر p یا «مقدم» نادرست باشد، گزاره به انتفای مقدم درست است:

$$p \equiv F \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$$

۵) **درست بودن تالی:** در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر q یا «تالی» درست باشد، $p \Rightarrow q$ همواره درست است:

$$q \equiv T \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$$

۴) **ترکیب دوشروطی:** اگر دو گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را با ترکیب عطفی « $\wedge$ » به هم مرتبط کنیم، ترکیب دو شرطی

$p \Leftrightarrow q$ به دست می‌آید که آن را به صورت « p اگر و تنها اگر q » یا « p شرط لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۱) ارزش $p \Leftrightarrow q$ فقط در حالتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند:

۲) نقیض $p \Leftrightarrow q$ را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

۳) ترکیب دوشروطی یک گزاره با خودش همواره درست و ترکیب دو شرطی یک گزاره با نقیض همواره نادرست است:

$$p \Leftrightarrow p \equiv T$$

$$p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$$

هم‌ارزی‌های منطقی:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

۱) جابه‌جایی

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

۲) شرکت‌پذیری

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

۳) توزیع‌پذیری

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

۴) دمورگان

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

۵) جذب

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$$

✓ **پاسخ خیلی تشریحی:** **گام اول:** اگر ارزش $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ درست باشد، ارزش گزاره $[(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)] \vee s$ هم درست می‌شود. اما اگر

ارزش آن نادرست بود، باید ارزش s درست باشد. پس ابتدا باید بفهمیم ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ در چه حالتی (یا

حالاتی) نادرست است.

گام دوم: ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ فقط وقتی نادرست است که ارزش $p \wedge q$ درست و ارزش $p \wedge r$ نادرست باشد:

$$\begin{cases} p \wedge q \equiv T \xrightarrow{\text{بنابراین}} \begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv T \end{cases} \\ p \wedge r \equiv F \xrightarrow{\text{بنابراین}} r \equiv F \\ \text{و } T \end{cases}$$

پس ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ فقط وقتی نادرست است که p درست، q درست و r نادرست باشد.

درس‌Box

گام سوم: بنابراین ارزش گزاره $((p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)) \vee s$ زمانی همواره درست می‌شود که p درست، q درست و r نادرست و s دارای ارزش درست باشد.

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: (جواب گزینه‌ای است که به ازای p درست، q درست و r نادرست، ارزش درست داشته باشد).

گزینه (۱): $(p \wedge q) \wedge r \equiv \underbrace{T \wedge T}_T \wedge F \equiv F \quad \times$

گزینه (۲): $(p \wedge q) \wedge \sim r \equiv \underbrace{T \wedge T}_T \wedge \underbrace{(\sim F)}_T \equiv T \quad \checkmark$

گزینه (۳): $(p \wedge \sim q) \wedge r \equiv \underbrace{(T \wedge \sim T)}_F \wedge F \equiv F \quad \times$

گزینه (۴): $(\sim p \wedge q) \wedge r \equiv \underbrace{(\sim T \wedge T)}_F \wedge F \equiv F \quad \times$

در جای خالی کدام یک از سورهای زیر را قرار دهیم تا ارزش گزاره سوری « $x^2 + y^2 = 2y - 1$ » درست باشد؟

(ب) $\forall x, \exists y$

(الف) $\forall x, \forall y$

(ت) $\exists y, \exists x$

(پ) $\forall y, \exists x$

(۲) ب - ت

(۱) الف - ب - پ

(۴) ت

(۳) پ - ت



همه عبارت‌ها را به سمت چپ تساوی ببرید!

Hint

سورها

درس Box

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به ازای هر»، یا «به ازای جميع مقادیر» از نماد $\forall$ و به جای «وجود دارد»، یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$ استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ سور عمومی و نماد $\exists$ سور وجودی نامیده می‌شود.

(۱) ارزش گزاره‌های سوری با سور عمومی (یا همان $\forall$)، زمانی درست است که ارزش گزاره‌نما به ازای تمام اعضای دامنه متغیر، درست باشد.

(۲) ارزش گزاره‌های سوری با سور وجودی (یا همان $\exists$)، زمانی درست است که ارزش گزاره‌نما به ازای حداقل یکی از اعضای دامنه متغیر، درست باشد.

(۳) مجموع چند عبارت نامنفی فقط زمانی برابر صفر می‌شود که تک‌تک عبارت‌ها برابر صفر باشند؛ برای مثال:

$$\sqrt{x-2} + (y+3)^4 + |z-5| = 0 \Rightarrow (x-2=0) \wedge (y+3=0) \wedge (z-5=0) \Rightarrow (x=2) \wedge (y=-3) \wedge (z=5)$$

گام اول: همه عبارت‌ها را به سمت چپ تساوی می‌بریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$x^2 + y^2 = 2y - 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 0$$

گام دوم: با توجه به نکته (۳) درس باکس، این تساوی فقط زمانی برقرار است که $(x=0) \wedge (y-1=0)$ یعنی $x=0$ و $y=1$ باشد. یعنی وجود دارد مقداری برای y (همان $y=1$) که به ازای آن مقداری برای x پیدا می‌شود (همان $x=0$) که تساوی برقرار باشد، بنابراین هر دو سور باید وجودی باشند و فقط با جای‌گذاری «ت» در جای خالی، ارزش گزاره سوری درست است.

یک سوم زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ شامل عضو ۲ هستند. A چند زیرمجموعه ۴ عضوی یا ۵ عضوی دارد؟

یعنی تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی شامل عضو ۲، یک سوم تعداد کل زیرمجموعه‌های ۳ عضوی است.

$$\binom{10}{5}^{(2)}$$

$$\binom{10}{4}^{(1)}$$

$$\binom{12}{7}^{(4)}$$

$$\binom{11}{6}^{(3)}$$



درسی Box

۱) اگر n شیء متمایز داشته باشیم، تعداد راه‌های انتخاب k شیء از میان آن‌ها (به طوری که جایگشت اشیاء انتخاب شده مهم نباشد) برابر است با:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

۲) اتحاد پاسکال به صورت مقابل است:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

گام اول: تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعه A برابر $\binom{k}{3}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: حالا برای شمارش تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی شامل ۲، به این توجه می‌کنیم که عضو ۲ درون زیرمجموعه هست،

پس برای این که زیرمجموعه سه‌عضوی شود، باید ۲ عضو دیگر از میان $k-1$ عضو دیگر (همه اعضا به جز عضو ۲) انتخاب کنیم که به

$$\binom{k-1}{2} \text{ حالت امکان پذیر است.}$$

گام سوم: تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی شامل عضو ۲، یک سوم تعداد کل زیرمجموعه‌های ۳ عضوی است:

$$\binom{k-1}{2} = \frac{1}{3} \binom{k}{3} \Rightarrow \frac{(k-1)(k-2)}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{k}{18} \Rightarrow k = 9$$

بنابراین $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ است.

گام چهارم: بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های ۴ یا ۵ عضوی A برابر است با:

$$\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{10}{5}$$

تعداد زیرمجموعه‌های چهارعضوی + تعداد زیرمجموعه‌های پنج‌عضوی = طبق اتحاد پاسکال

اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $A = [a, 7]$ و $B = [5, b]$ ، در این صورت مساحت مربوط به ناحیه $A^c - B^c$ برابر کدام یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟ ($a < 5$ و $b > 7$)

۵ (۱)

۲۱ (۲)

۳۲ (۳)

۴۵ (۴)



به این توجه کنید که $A \cap B = [5, 7]$ شده و $A^c - B^c = A^c - (A \cap B)^c$ است.

نکاتی درباره ضرب دکارتی دو مجموعه

Hint

درس Box

۱) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

۲) $A^c = A \times A$

۳) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

حواستون باشه که چنین رابطه‌ای برای اجتماع درست نیست! یعنی تساوی $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ الزاماً درست نیست.

۴) $A \times B - C \times D = A \times B - ((A \times B) \cap (C \times D)) = A \times B - ((A \cap C) \times (B \cap D))$

۵) $A^c \cap B^c = (A \cap B)^c$

۶) $A^c - B^c = A^c - A^c \cap B^c = A^c - (A \cap B)^c$

اگر A بازه‌ای به طول m و B بازه‌ای به طول n باشد، مساحت ناحیه محدود به $A \times B$ برابر mn می‌شود.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: طبق گفته سؤال $a < 5$ و $b > 7$ است، پس:



اشتراک $\rightarrow A \cap B = [5, 7]$

گام دوم: $A = [a, 7]$ و $A \cap B = [5, 7]$ است، پس طول این دو بازه به ترتیب برابر $7 - a$ و $7 - 5 = 2$ می‌شود.

گام سوم: طبق درس باکس $A^c - B^c = A^c - (A \cap B)^c$ است، پس مساحت ناحیه $A^c - B^c$ برابر می‌شود با:

$$S_{A^c - B^c} = S_{A^c} - S_{(A \cap B)^c} = (A \text{ بازه})^2 - (A \cap B \text{ بازه})^2 = (7 - a)^2 - 2^2 = (7 - a)^2 - 4$$

گام چهارم: a عددی طبیعی و کوچک‌تر از ۵ است، پس a می‌تواند برابر ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد. در هر حالت، مساحت ناحیه $A^c - B^c$ را حساب می‌کنیم:

$$a = 1 \Rightarrow S_{A^c - B^c} = (7 - a)^2 - 4 = (7 - 1)^2 - 4 = 36 - 4 = 32$$

$$a = 2 \Rightarrow S_{A^c - B^c} = (7 - a)^2 - 4 = (7 - 2)^2 - 4 = 25 - 4 = 21$$

$$a = 3 \Rightarrow S_{A^c - B^c} = (7 - a)^2 - 4 = (7 - 3)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$$

$$a = 4 \Rightarrow S_{A^c - B^c} = (7 - a)^2 - 4 = (7 - 4)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

بنابراین مساحت ناحیه $A^c - B^c$ نمی‌تواند برابر ۴۵ باشد.

۳۵ یک پیشامد X عضوی از فضای نمونه‌ای هم‌شانس S و B یک پیشامد $X+2$ از همان فضای نمونه‌ای است به طوری که $P(B) = \frac{1}{5} + P(A)$. اگر تعداد پیشامدهای X عضوی و $X+2$ عضوی در این فضای نمونه‌ای برابر باشند، $P(A)$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{5} (1) & \frac{2}{5} (2) \\ \frac{3}{5} (3) & \frac{4}{10} (4) \end{array}$$

فضای نمونه‌ای: در یک آزمایش تصادفی، به مجموعه تمام حالاتی که ممکن است رخ دهند، فضای نمونه‌ای می‌گوییم. فضای نمونه‌ای را عموماً با S نمایش می‌دهیم.

پیشامد: به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد می‌گوییم.

تعداد پیشامدهای k عضوی از یک فضای نمونه‌ای n عضوی برابر تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضوی است که برابر است با:

$$\binom{n}{k}$$

یک پیشامد وقتی رخ می‌دهد که حاصل آزمایش، یکی از اعضای پیشامد باشد.

احتمال رخ دادن یک پیشامد: اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال رخ دادن A برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

پیشامد ساده: هر زیرمجموعه تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم.

فضای نمونه‌ای با احتمال هم‌شانس: هرگاه احتمال رخ دادن تمام پیشامدهای ساده در یک فضای نمونه‌ای با هم برابر باشند، یک فضای نمونه‌ای با احتمال هم‌شانس داریم. در فضای نمونه‌ای با احتمال هم‌شانس، احتمال رخ دادن تمام پیشامدهای ساده $\frac{1}{n(S)}$ است.

با توجه به این که $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ است، می‌توانیم بگوییم:

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = n \end{cases}$$

گام اول: اگر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را n فرض کنیم، تعداد پیشامدهای X عضوی آن برابر $\binom{n}{X}$ و تعداد پیشامدهای $X+2$ عضوی آن برابر $\binom{n}{X+2}$ است.

گام دوم: طبق گفته سؤال، تعداد پیشامدهای X عضوی و $X+2$ عضوی برابرند:

$$\binom{n}{X} = \binom{n}{X+2} \xrightarrow{\text{طبق درس Box}} \begin{cases} X = X+2 \Rightarrow 0 = 2 \times \\ X + X+2 = n \Rightarrow n = 2X+2 \end{cases}$$

بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $2X+2$ است.

گام سوم: A یک پیشامد X عضوی و B یک پیشامد $X+2$ عضوی است، پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{X}{2X+2}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{X+2}{2X+2}$$

گام چهارم: با جای گذاری $P(A) = \frac{X}{2X+2}$ و $P(B) = \frac{X+2}{2X+2}$ در تساوی $P(B) = \frac{1}{5} + P(A)$ داریم:

$$\frac{X+2}{2X+2} = \frac{1}{5} + \frac{X}{2X+2} \Rightarrow \frac{X+2}{2X+2} - \frac{X}{2X+2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2}{2X+2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{X+1} = \frac{1}{5} \Rightarrow X+1 = 5 \Rightarrow X = 4$$

گام پنجم: بنابراین:

$$P(A) = \frac{X}{2X+2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

درس Box

نکته

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، پنج برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است. در پرتاب این تاس، احتمال این که عدد زوج مشاهده شود، چه قدر است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{18} \quad (۳)$$

$$\frac{11}{18} \quad (۴)$$



درس‌Box

فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس: هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای S احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

در یک فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی از S باشد، همواره داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (۱)$$

$$P(S) = P(s_1) + P(s_2) + P(s_3) + \dots + P(s_n) = 1 \quad (۲)$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad (۳)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است.

گام دوم: احتمال وقوع هر عدد اول، پنج برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است؛ پس اگر احتمال وقوع هر کدام از اعداد غیراول (یعنی ۱ و ۴ و ۶) را x فرض کنیم، احتمال وقوع هر کدام از اعداد اول (یعنی ۲ و ۳ و ۵) برابر $5x$ می‌شود.

$$P(1) = x$$

$$P(2) = 5x$$

$$P(3) = 5x$$

$$P(4) = x$$

$$P(5) = 5x$$

$$P(6) = x$$

گام سوم: از طرفی طبق درس‌باکس داریم:

$$P(S) = \underbrace{P(1)}_x + \underbrace{P(2)}_{5x} + \underbrace{P(3)}_{5x} + \underbrace{P(4)}_x + \underbrace{P(5)}_{5x} + \underbrace{P(6)}_x = 1 \Rightarrow 18x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{18}$$

گام چهارم: احتمال این که عدد زوج مشاهده شود برابر است با:

$$P(\text{زوج}) = \underbrace{P(2)}_{5x} + \underbrace{P(4)}_x + \underbrace{P(6)}_x = 7x = \frac{7}{18}$$

در یک آزمایش با فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c, d\}$ ، می‌دانیم $P(\{a, b\}) = P(c)$ ، $P(\{b, c\}) = 2P(d)$ و $P(\{a, c\}) = 0/45$ است.

مقدار $P(a)$ کدام است؟

۰/۱۵ (۲)

۰/۱ (۱)

۰/۲۵ (۴)

۰/۲ (۳)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c, d\}$ است، پس:

$$P(S) = P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \quad (*)$$

گام دوم: از طرفی:

$$P(\{a, c\}) = 0/45 \Rightarrow P(a) + P(c) = 0/45 \Rightarrow P(c) = 0/45 - P(a) \quad (I)$$

$$P(\{a, b\}) = P(c) \Rightarrow P(a) + P(b) = P(c) \xrightarrow{\text{طبق (I)}} P(a) + P(b) = 0/45 - P(a) \Rightarrow P(b) = 0/45 - 2P(a) \quad (II)$$

گام سوم: حالا داریم:

$$P(\{b, c\}) = 2P(d) \Rightarrow P(b) + P(c) = 2P(d) \xrightarrow{\text{طبق (I), (II)}} 0/45 - 2P(a) + 0/45 - P(a) = 2P(d)$$

$$\Rightarrow 2P(d) = 0/9 - 3P(a) \Rightarrow P(d) = 0/45 - 1/5 P(a) \quad (III)$$

گام چهارم: با جای‌گذاری روابط (I)، (II) و (III) در (*) داریم:

$$P(a) + 0/45 - 2P(a) + 0/45 - P(a) + 0/45 - 1/5 P(a) = 1$$

$$\Rightarrow -3/5 P(a) + 1/35 = 1 \Rightarrow -3/5 P(a) = -0/35 \Rightarrow P(a) = \frac{-0/35}{-3/5} = 0/1$$

دو تاس پرتاب می‌کنیم و می‌بینیم که مجموع اعداد رو شده دو تاس مضرب ۳ است. با چه احتمالی عدد رو شده حداقل یکی از تاس‌ها اول است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{11}{12} \quad (۴)$$



Hint

تعداد حالاتی که مجموع اعداد رو شده دو تاس مضرب ۳ است را در مخرج و تعداد حالاتی که مجموع اعداد رو شده دو تاس مضرب ۳ است و عدد رو شده حداقل یکی از تاس‌ها اول است را در صورت قرار دهید.

دانش‌Box

احتمال شرطی: احتمال رخ دادن پیشامد A به شرطی که بدانیم پیشامد B رخ داده است را با $P(A | B)$ نمایش می‌دهیم که برابر است با:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

پرتاب دو تاس

برای حل سؤالاتی که در آن‌ها دو تاس پرتاب می‌شوند و احتمال رخ دادن یک پیشامد خاص را می‌خواهیم، روش‌های مختلفی وجود دارد، اما بهترین روش این است که جدولی به شکل زیر رسم کنیم و حالات مطلوب را در آن مشخص کنیم.

تاس اول \ تاس دوم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						
۲						
۳						
۴						
۵						
۶						

پاسخ‌خیزی تشریحی ✓

گام اول: دو پیشامد A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

پیشامد A: عدد رو شده حداقل یکی از تاس‌ها اول باشد.

پیشامد B: مجموع اعداد رو شده دو تاس مضرب ۳ (یعنی برابر ۳ یا ۶ یا ۹ یا ۱۲) باشد.

گام دوم: طبق گفته سؤال می‌دانیم مجموع اعداد رو شده دو تاس مضرب ۳ است و احتمال این را می‌خواهیم که عدد رو شده شرط

حداقل یکی از تاس‌ها اول باشد، یعنی $P(A | B)$ که طبق درس‌بکس برابر $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ می‌شود.

گام سوم: جدولی مشابه جدول رسم‌شده در درس‌بکس رسم می‌کنیم و در آن، حالاتی که مجموع اعداد رو شده دو تاس مضرب ۳ باشد را مشخص می‌کنیم:

تاس اول \ تاس دوم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱		○			○	
۲	○			○		
۳			○			○
۴		○			○	
۵	○			○		
۶			○			○

بنابراین $n(B) = ۱۲$ است.

گام چهارم: حالا از میان خانه‌های مشخص شده، حالتی که عدد رو شده حداقل یکی از تاس‌ها اول باشد را با علامت تیک مشخص می‌کنیم:

تاس اول \ تاس دوم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱		✓			✓	
۲	✓			✓		
۳			✓			✓
۴		✓			✓	
۵	✓			✓		
۶			✓			○

بنابراین $n(A \cap B) = 11$ و $P(A | B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{11}{12}$ می‌شود.

A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S هستند، به طوری که $P(A) = ۰/۵$ ، $P(B) = ۰/۴$ و $P(A \cap B) = ۰/۱$ است. مقدار

$P(A - B | B' \cup A)$ چه قدر است؟

$\frac{۲}{۷}$ (۱)

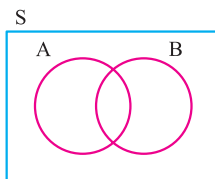
$\frac{۴}{۷}$ (۲)

$\frac{۱}{۲}$ (۳)

$\frac{۳}{۸}$ (۴)

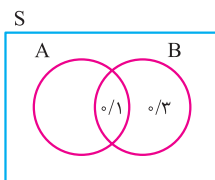


پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا یک نمودار ون به شکل مقابل رسم می‌کنیم:



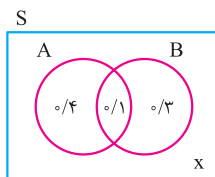
گام دوم: $P(B) = ۰/۴$ و $P(A \cap B) = ۰/۱$ است،

پس $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = ۰/۴ - ۰/۱ = ۰/۳$ می‌شود:



گام سوم: $P(A) = ۰/۵$ و $P(A \cap B) = ۰/۱$ است،

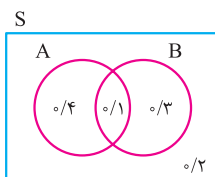
پس $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = ۰/۵ - ۰/۱ = ۰/۴$ می‌شود:



گام چهارم: از طرفی $P(S) = ۱$ پس:

$$\underbrace{۰/۴ + ۰/۱ + ۰/۳}_{۰/۸} + x = ۱ \Rightarrow x = ۰/۲$$

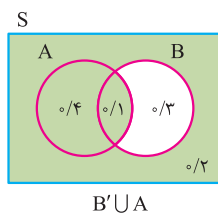
بنابراین نمودار ون به شکل مقابل شد:



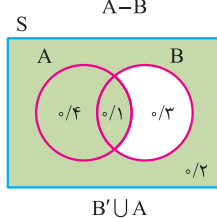
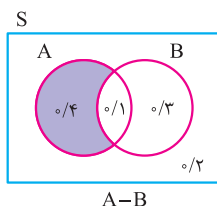
گام پنجم: با استفاده از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(A - B | B' \cup A) = \frac{P((A - B) \cap (B' \cup A))}{P(B' \cup A)}$$

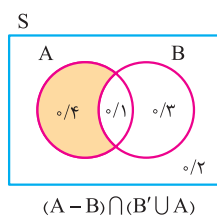
گام ششم: ناحیه‌های $B' \cup A$ و $(A - B) \cap (B' \cup A)$ را روی نمودار مشخص می‌کنیم.



$$\Rightarrow P(B' \cup A) = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{7}{7}$$



$\Rightarrow$



$$\Rightarrow P((A - B) \cap (B' \cup A)) = \frac{4}{7}$$

گام هفتم: بنابراین:

$$P(A - B | B' \cup A) = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{7}{7}} = \frac{4}{7}$$

تیم ملی والیبال ایران ۱۲ بازیکن دارد که قد هیچ دو بازیکنی با هم برابر نیست. می‌دانیم a از نظر قدی بلندتر از b و c است؛ با چه احتمالی a بلندقدترین بازیکن تیم است؟

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{1}{10}$

(۴) $\frac{1}{9}$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا تعداد حالاتی را می‌شماریم که a از نظر قدی بلندتر از b و c باشد. ۱۲ بازیکن داریم، پس ۱۲ جایگاه برای آن‌ها فرض می‌کنیم:

گام دوم: به $22^0 = \binom{12}{3}$ حالت می‌توانیم ۳ جایگاه از ۱۲ جایگاه بالا را انتخاب کنیم. در جایگاه اول از این سه جایگاه a را قرار

می‌دهیم و b و c به ۲! حالت می‌توانند در دو جایگاه بعدی قرار گیرند؛ مثلاً به شکل زیر:

__ a __ b __ c __

گام سوم: حالا $9 = 12 - 3$ نفر دیگر داریم که به ۹! حالت می‌توانند در مابقی جایگاه‌ها قرار گیرند. پس تعداد حالاتی که a از نظر قدی بلندتر از b و c باشد برابر $9! \times 2! \times 22^0$ است.

گام چهارم: حالا باید حالاتی را بشماریم که a از نظر قدی بلندتر از بقیه باشد. کافی است a را در جایگاه اول قرار دهیم:

a -----

حالا ۱۱ نفر دیگر به ۱۱! حالت می‌توانند در مابقی جایگاه‌ها قرار گیرند (دقت کنید در این حالت، a از نظر قدی از b و c بلندتر است)، پس در ۱۱! حالت، a بلندقدترین بازیکن تیم است.

گام پنجم: بنابراین جواب برابر است با:

$$P(a \text{ بلندقدترین باشد} | a \text{ از } b \text{ و } c \text{ بلندتر باشد}) = \frac{n(a \cap b \text{ و } c \text{ بلندتر باشد})}{n(a \text{ از } b \text{ و } c \text{ بلندتر باشد})} = \frac{n(a \text{ بلندقدترین باشد})}{n(a \text{ از } b \text{ و } c \text{ بلندتر باشد})}$$

$$= \frac{11!}{22^0 \times 2! \times 9!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{22 \times 2 \times 9!} = \frac{11}{44} = \frac{1}{4}$$

بار الکتریکی هسته یون X^{+3} برابر با $2/08 \times 10^{-18} \text{ C}$ است. مجموع بار الکتریکی الکترون‌های این یون، چند میکروکولن است؟

$$(e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C})$$

$$(2) -1/6 \times 10^{-11}$$

$$(1) -1/6 \times 10^{-12}$$

$$(4) -1/6 \times 10^{-17}$$

$$(3) -1/6 \times 10^{-18}$$



Hint

ابتدا مقدار بار الکتریکی سه الکترون را از رابطه $(q = ne)$ به دست آورید و سپس آن را با بار اولیه الکترون‌های اتم که در صورت تست بیان شده، جمع جبری کنید.

درسی Box

کوانتیده بودن بار الکتریکی: همواره بار الکتریکی یک جسم، مضرب درستی از یک مقدار پایه (بار بنیادی e) است و هر مقدار دلخواهی نمی‌تواند داشته باشد.

$$q = \pm ne, \quad e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

تعداد الکترون مبادله شده

علامت +: برای جسمی که الکترون از دست داده است.

علامت -: برای جسمی که الکترون گرفته است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بار الکتریکی هسته هر اتم ثابت و برابر با بار مثبت و منفی اولیه اتم، قبل از دست دادن و یا دریافت الکترون است؛ بنابراین بار

الکترون‌های اتم، قبل از این که الکترون از دست بدهد، برابر با $q = -2/08 \times 10^{-18} \text{ C}$ بوده است.

حال این یون سه الکترون از دست داده؛ پس به اندازه $q = 3e$ بار منفی آن کاهش می‌یابد:

$$q = -2/08 \times 10^{-18} + 3 \times 1/6 \times 10^{-19} = -1/6 \times 10^{-18} \text{ C} = -1/6 \times 10^{-12} \mu\text{C}$$

بار الکتریکی دو ذره باردار، یکسان است. ۹۶ درصد از بار یکی از این ذره‌ها را به ذره دیگر منتقل می‌کنیم. برای آن که نوع و اندازه نیروی الکتریکی بین دو ذره تغییر نکند، فاصله بین دو ذره باید چند درصد و چگونه تغییر کند؟

مشاوره سؤالاتی که در آن‌ها اطلاعات درصدی به شما می‌دهند و یا از شما درصد تغییرات می‌پرسند در تمامی کنکورهای مطرح می‌شوند و توصیه می‌کنیم روی آن‌ها تسلط داشته باشید.

Hint

درس Box

نیروی بین دو بار را در هر دو حالت با استفاده از رابطه $(F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2})$ محاسبه کنید و اندازه آن‌ها را برابر هم قرار دهید تا نسبت $\frac{r'}{r}$ به دست آید. حال از طریق رابطه $(\frac{\Delta r}{r} \times 100)$ درصد تغییرات فاصله را محاسبه کنید.

هر دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصله r به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند که اندازه این نیرو از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2}$$

اندازه نیرو $F: (N)$

$$k: \text{ثابت کولن} = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$$

r : (m) فاصله دو بار از هم

q_1, q_2 : بارهای الکتریکی نقطه‌ای

نیروی بین دو بار در حالتی که دو بار همنام هستند، از نوع دافعه (رانشی) و در حالتی که دو بار ناهمنام هستند، از نوع جاذبه (ربایشی) است.

بنا بر قانون سوم نیوتون، نیروی الکتروستاتیکی که دو بار بر یکدیگر وارد می‌کنند، هم‌اندازه، هم‌راستا ولی در خلاف جهت یکدیگرند.



بر اساس قانون کولن، نیروی الکتروستاتیکی بین دو بار با حاصل ضرب بارها رابطه مستقیم و با مجذور فاصله بارها از یکدیگر رابطه عکس دارد:

$$\frac{F'}{F} = \frac{q'_1}{q_1} \times \frac{q'_2}{q_2} \times \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا نیروی بین دو بار را در حالت اول محاسبه می‌کنیم:

$$q \quad r \quad q \quad F = \frac{k |q| |q|}{r^2} \Rightarrow F = \frac{kq^2}{r^2}$$

گام دوم: سپس نیروی بین آن‌ها را در حالت دوم به دست می‌آوریم:

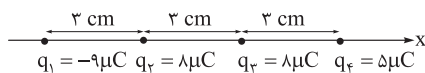
$$(q + \frac{96}{100}q) \quad r' \quad (q - \frac{96}{100}q) \quad F = \frac{k(\frac{1}{25}q)(\frac{49}{25}q)}{r'^2}$$

گام سوم: طبق صورت سؤال، نیروها در دو حالت با هم برابرند؛ بنابراین:

$$\frac{kq^2}{r^2} = \frac{kq^2(\frac{49}{25 \times 25})}{r'^2} \Rightarrow \frac{r'^2}{r^2} = \frac{49}{25 \times 25} \Rightarrow \frac{r'}{r} = \frac{7}{25}$$

$$\text{درصد تغییرات فاصله: } \frac{\Delta r}{r} \times 100 = \frac{r' - r}{r} \times 100 = \frac{7 - 25}{25} \times 100 = - (72\%)$$

مطابق شکل، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x ثابت شده‌اند. بار q_3 روی محور x ، چند سانتی‌متر جابه‌جا شود تا نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_4 در SI برابر با $\vec{F} = -5.0\vec{i}$ شود؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$



۳ (۱)

۶ (۲)

۹ (۳)

۱۲ (۴)

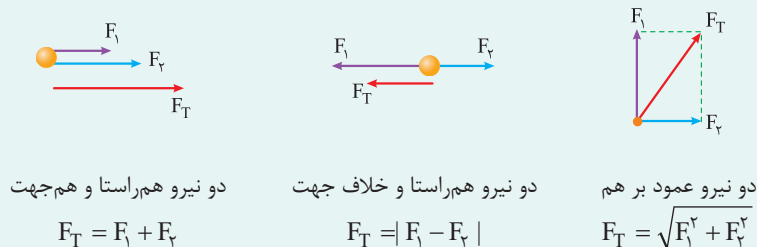
مشاوره در مبحث الکتریسته ساکن هر سال حداقل یکی از تست‌های کنکور در مورد برابند (نیروها یا میدان‌ها) است. تمامی روش‌های برابندگیری را باید به خوبی بلد باشید.

Hint

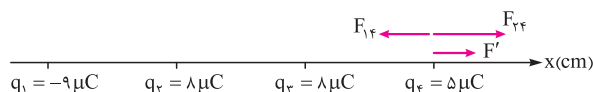
دستی Box

ابتدا F_{14} و F_{24} را به دست آورده و برابند آن‌ها را محاسبه و رسم کنید. سپس با توجه به نیروی خالص وارد بر بار q_4 ، اندازه و جهت نیروی بار q_3 به q_4 را مشخص کنید و با توجه به این نیرو، اندازه فاصله جدید را به دست آورید.

برای محاسبه برابند دو نیروی F_1 و F_2 در کتاب درسی، سه حالت مطابق شکل‌های زیر وجود دارد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا نیروی خالص وارد بر بار q_4 را از طرف بارهای q_1 و q_2 محاسبه می‌کنیم:



$$F = \frac{k |q_1| |q_4|}{r^2} \Rightarrow F_{14} = \frac{9 \times 10^9 \times 9 \times 5}{9^2} = 50 \text{ N}, F_{24} = \frac{9 \times 10^9 \times 8 \times 5}{6^2} = 100 \text{ N}$$

$$\vec{F}' = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} = |100 - 50| = 50 \text{ N} \text{ به سمت راست}$$

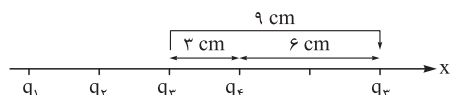
گام دوم: بنابراین برای این که نیروی خالص وارد بر q_4 از طرف هر سه بار $\vec{F} = -5.0\vec{i}$ باشد، داریم:

$$\vec{F}_{34} = -100\vec{i}$$

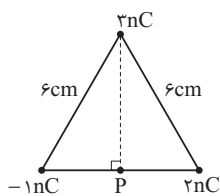
گام سوم: اندازه نیروی بار q_3 به q_4 را برابر 100 N قرار می‌دهیم تا فاصله جدید آن‌ها به دست آید:

$$F_{34} = 100 = \frac{9 \times 10^9 \times 8 \times 5}{r^2} \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6 \text{ cm}$$

گام چهارم: چون نیروی q_3 به q_4 باید به سمت چپ ($-\vec{i}$) باشد و با توجه به این که بارهای آن‌ها همنام هستند، بار q_3 می‌بایست به سمت بار q_4 جابه‌جا شده و در 6 سانتی‌متری طرف دیگر آن قرار بگیرد. به این ترتیب بار q_3 باید 9 cm جابه‌جا شود.



مطابق شکل، سه بار الکتریکی نقطه‌ای در رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع 6 cm ثابت شده‌اند. بزرگی میدان الکتریکی خالص



در نقطه P ، چند کیلوولت بر متر است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$

(۱) 10

(۲) $10\sqrt{2}$

(۳) $10\sqrt{5}$

(۴) $10\sqrt{10}$



Hint ابتدا اندازه میدان حاصل از هر یک از بارها را در نقطه P به دست آورید، سپس بردارهایشان را رسم کرده و با توجه به جهت آن‌ها، میدان خالص را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** اندازه میدان الکتریکی حاصل از بارها را در نقطه P محاسبه می‌کنیم:

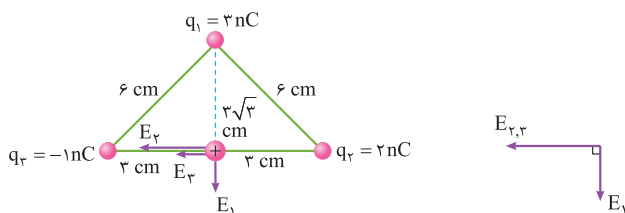
$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

$$E_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-9}}{(3\sqrt{3} \times 10^{-2})^2} \Rightarrow E_1 = \frac{9 \times 3}{27 \times 10^{-4}} = 10^4 \text{ V/m} \times 10^{-3} = 10 \text{ kV/m}$$

$$E_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-9}}{(3 \times 10^{-2})^2} = \frac{9 \times 2}{9 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^4 \text{ V/m} \times 10^{-3} = 20 \text{ kV/m}$$

$$E_3 = \frac{9 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-9}}{(3 \times 10^{-2})^2} = \frac{9}{9 \times 10^{-4}} = 10^4 \text{ V/m} \times 10^{-3} = 10 \text{ kV/m}$$

گام دوم: حال با توجه به جهت میدان‌های الکتریکی، برآیند آن‌ها را در نقطه P به دست می‌آوریم:



$$E_{1,2,3} = E_2 + E_3 = 20 + 10 = 30 \text{ kV/m}$$

$$E_t = \sqrt{E_{1,2,3}^2 + E_1^2} \Rightarrow E_t = \sqrt{30^2 + 10^2} \Rightarrow E_t = 10\sqrt{10} \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $2 \times 10^4 \text{ N/C}$ که جهت آن قائم و رو به پایین است، ذره باردارى به جرم 8 g معلق و به حال سکون قرار دارد. بار ذره چند میکروکولن است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

مشاوره یکی از مباحث مهم در الکتریسته ساکن تعادل یک ذره است، یعنی نیروی خالص وارد بر ذره صفر شود. باید به خوبی بدانید در چه شرایطی با وجود نیروهای مختلف این اتفاق می‌افتد.

(۱) -۴

(۲) ۴

(۳) -۲

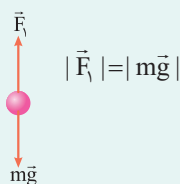
(۴) ۲

Hint

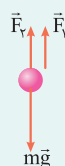
اندازه بار را با توجه به این که نیروی خالص وارد بر آن صفر است، از رابطه $(E|q| = mg)$ به دست آورید و سپس با توجه به جهت میدان و جهت نیروی وارد بر آن، نوع بار q را مشخص کنید.

دستی Box

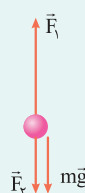
اگر جسمی به جرم m در یک فضا در حال تعادل باشد، باید نیروی خالص وارد بر آن صفر شود. در صورتی که علاوه بر وزن، یک نیروی دیگر به آن وارد شود، این دو نیرو هم‌اندازه و خلاف جهت یکدیگر هستند:



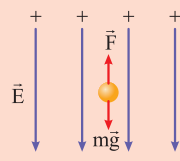
و اگر چند نیروی دیگر نیز همراه با نیروی وزن به آن اثر کند، باید برابری آن‌ها با نیروی وزن، صفر شود.



$$|mg| = |F_1 + F_2|$$



$$|F| = |F + mg|$$



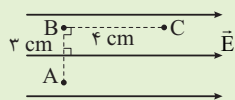
پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به جهت میدان و جهت نیروی وارد بر ذره درون میدان، بار ذره منفی است.

$$|F| = |mg| \Rightarrow E|q| = mg \Rightarrow |q| = \frac{8 \times 10^{-3} \times 10}{2 \times 10^4}$$

$$|q| = 4 \times 10^{-6} \text{ C} \Rightarrow q = -4 \mu\text{C}$$

بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -50 \mu\text{C}$ مطابق شکل زیر در میدان الکتریکی یکنواخت و افقی $E = 4 \times 10^4 \text{ N/C}$ ابتدا به اندازه 3 cm

از نقطه A تا نقطه B و سپس به اندازه 4 cm از نقطه B تا نقطه C جابه‌جا می‌شود. چه تعداد از موارد زیر درست هستند؟



الف) تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار از نقطه A تا نقطه C برابر با $+80 \text{ mJ}$ است.

ب) پتانسیل الکتریکی نقطه B به اندازه 1600 V بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطه C است.

پ) نقاط A و B هم‌پتانسیل‌اند.

ت) کار میدان الکتریکی در جابه‌جایی بار از نقطه B تا نقطه C برابر با -100 mJ است.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)



درس‌بکس را به دقت بخوانید و سعی کنید خودتان سؤال را حل کنید.

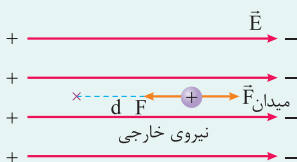


درس‌Box

اگر بار الکتریکی q را درون یک میدان الکتریکی یکنواخت با نیرویی هم‌اندازه با نیروی الکتریکی میدان اما در خلاف جهت آن جابه‌جا کنیم، برای این جابه‌جایی کار انجام داده‌ایم که از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_{\text{میدان}}| = |\vec{E} q|$$

$$W_{\text{نیروی خارجی}} = E |q| d \cos \theta$$



نیروی خارجی W : کار نیروی خارجی (J)

E : میدان الکتریکی (N/C)

q : بار الکتریکی (C)

d : جابه‌جایی (m)

$$\left. \begin{aligned} W &> 0 \quad \leftarrow \cos \theta > 0 \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ \\ W &< 0 \quad \leftarrow \cos \theta < 0 \quad 90^\circ < \theta < 180^\circ \end{aligned} \right\} \theta: \text{زاویه بین نیرو و جابه‌جایی}$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی:

اگر بار الکتریکی q درون میدان الکتریکی از نقطه (۱) به (۲)

منتقل شود و انرژی پتانسیل الکتریکی آن از U_1 به U_2

برسد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطه (۱) و (۲) از رابطه

مقابل قابل محاسبه است:

$$V_2 - V_1 = \frac{U_2 - U_1}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

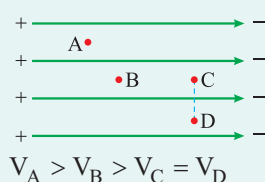
ΔU : تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)
 q : بار الکتریکی (C) (لرؤماً با علامتش باید لحاظ شود)
 ΔV : اختلاف پتانسیل (V) دو نقطه

اگر بار الکتریکی در جهت تمایل خود در میدان جابه‌جا شود، $\Delta U < 0$ و $|\Delta U| = |W|$. اگر بار الکتریکی در خلاف جهت تمایل خود در میدان جابه‌جا شود، $\Delta U > 0$ است.

بار الکتریکی منفی: در جهت میدان حرکت کند، $\Delta U > 0$.
 خلاف جهت میدان حرکت کند، $\Delta U < 0$.

بار الکتریکی مثبت: در جهت میدان حرکت کند، $\Delta U < 0$.
 خلاف جهت میدان حرکت کند، $\Delta U > 0$.

پتانسیل الکتریکی:



$$V_A > V_B > V_C = V_D$$

این کمیت از ویژگی‌های میدان الکتریکی است و ارتباطی به حضور یا عدم حضور بار الکتریکی درون میدان ندارد. به طوری که درون میدان، پتانسیل الکتریکی در نزدیکی صفحه مثبت بیشتر از پتانسیل در نزدیکی صفحه منفی است؛ پس با حرکت در جهت میدان، پتانسیل کاهش می‌یابد و بالعکس با حرکت در خلاف جهت میدان، پتانسیل افزایش می‌یابد.

دقت کنید که در یک راستای عمود بر خطوط میدان، پتانسیل الکتریکی یکسان است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) درست؛

$$|\Delta U_{AC}| = |W_{AC}|$$

$$W_{AC} = W_{AB} + W_{BC} \xrightarrow{W_{AB}=0} W_{AC} = W_{BC} = Eqd_{BC} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow W_{AC} = 4 \times 10^{-4} \times 50 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-2} \times 1 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_{AC} = 8 \times 10^{-2} \text{ J} \times 10^{-3} = 80 \text{ mJ}$$

$$\xrightarrow{\text{بار در خلاف جهت تمایل خود حرکت کرده}} \Delta U > 0 \Rightarrow \Delta U = +80 \text{ mJ}$$

ب) درست؛

$$\Delta U_{BC} = +80 \text{ mJ} \Rightarrow \Delta V_{BC} = \frac{\Delta U_{BC}}{q} \Rightarrow \Delta V_{BC} = \frac{80 \times 10^{-3}}{-50 \times 10^{-6}} = -1600 \text{ V}$$

$$V_C - V_B = -1600 \Rightarrow V_B > V_C$$

پ) با توجه به توضیحات درس یا کس درست است.

ت) نادرست؛

$$W_{\text{میدان الکتریکی}} = Eqd \cos \alpha \Rightarrow W_{\text{میدان الکتریکی}} = 4 \times 10^{-4} \times 50 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-2} \times -1$$

$$\Rightarrow W_{\text{میدان الکتریکی}} = -8 \times 10^{-2} \text{ J} = -80 \text{ mJ}$$

- به یک کره رسانای خنثی به شعاع 5cm ، $60\text{ }\mu\text{C}$ بار الکتریکی می‌دهیم. چه تعداد از عبارات‌های زیر درباره این کره، درست است؟ ($\pi \approx 3$)
- الف) چگالی سطحی بار الکتریکی این کره در SI برابر 2×10^{-3} است.
 - ب) میدان الکتریکی درون کره برابر صفر است.
 - پ) پتانسیل الکتریکی تمام نقاط داخل و سطح این کره، برابر صفر است.
 - ت) تمامی بار داده‌شده به کره در سطح خارجی آن توزیع می‌شود.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

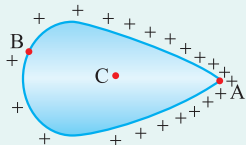


درس‌بکس زیر را به دقت خوانده و سعی کنید پاسخ تست را خودتان بیابید.

Hint

درس‌بکس

اگر بار اضافی به یک جسم رسانا داده شود و یا آن جسم در یک میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد، پس از مدت‌زمان کوتاهی که جسم در تعادل الکترواستاتیکی قرار می‌گیرد، میدان الکتریکی داخل آن صفر می‌شود. یا اگر یک جسم رسانای خنثی در میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، الکترون‌های آزاد جسم تحت تأثیر میدان الکتریکی خارجی، طوری روی سطح رسانا قرار می‌گیرند که میدان الکتریکی ناشی از آن‌ها اثر میدان خارجی را در داخل رسانا خنثی کند؛ از این‌رو میدان الکتریکی خالص درون رسانا صفر می‌شود. حال اگر به یک جسم رسانا، بار الکتریکی q را منتقل کنیم، بارها جابه‌جا شده و به سطح جسم منتقل می‌شوند تا در نهایت به تعادل الکتریکی برسند. پس از رسیدن به تعادل الکتریکی، تراکم بار در نزدیکی نقاط نوک‌تیز بیشتر خواهد بود و هنگامی که یک رسانا در تعادل الکترواستاتیکی باشد، پتانسیل الکتریکی تمام نقاط آن با هم برابر است.



$$q_A > q_B$$

$$V_A = V_B = V_C$$

اگر مساحت سطحی که بار روی آن توزیع شده است، برابر A و بار الکتریکی موجود در آن سطح برابر Q باشد، چگالی سطحی بار که با نماد σ نشان داده می‌شود از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

σ : چگالی سطحی بار (C/m^2)

Q : بار الکتریکی (C)

A : مساحت (m^2)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) درست؛

$$\sigma = \frac{Q}{A} \xrightarrow{A_{\text{کره}} = 4\pi r^2} \sigma = \frac{Q}{4\pi r^2} \Rightarrow \sigma = \frac{6 \times 10^{-5}}{4 \times 3 \times 25 \times 10^{-4}} \Rightarrow \sigma = 2 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2$$

ب) درست؛ با توجه به درس‌بکس، این عبارت درست است.

پ) نادرست؛ زیرا پتانسیل الکتریکی تمام نقاط جسم رسانا با هم برابر است، نه این‌که صفر باشد!

ت) درست؛ با توجه به توضیحات درس‌بکس، این عبارت درست است.

یک یاختهٔ عصبی را می‌توان با یک خازن تخت مدل‌سازی کرد. به طوری که غشای یاخته به عنوان دی‌الکتریک عمل می‌کند. اگر غشا دارای ثابت دی‌الکتریک $k = ۳$ ، ضخامت ۹ nm و مساحت سطح $۱۰^{-۱۰}\text{ m}^2$ باشد، ظرفیت این یاختهٔ عصبی چند پیکوفاراد است؟

$$(\epsilon_0 = ۹ \times ۱۰^{-۱۲} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2})$$

(۱) ۰/۰۳

(۲) ۰/۳

(۳) ۳

(۴) ۳۰



 Hint

با استفاده از رابطهٔ $(C = \frac{k\epsilon_0 A}{d})$ ظرفیت خازن را محاسبه کنید و در نهایت آن را به پیکوفاراد تبدیل واحد کنید.

 درس Box

عوامل مؤثر بر ظرفیت خازن:

همان‌طور که می‌دانید ظرفیت یک خازن به بار ذخیره‌شده در آن (q) و اختلاف پتانسیل دو سر آن (V) بستگی ندارد، بلکه به ساختمان آن وابسته است.

ظرفیت خازن از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$C = \frac{k\epsilon_0 A}{d}$$

k : ثابت دی‌الکتریک

$$\epsilon_0: \text{ضریب گذردهی الکتریکی خلأ} \left(\epsilon_0 = ۸/۸۵ \times ۱۰^{-۱۲} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2} \right)$$

$$C = \frac{k\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow C = \frac{۳ \times ۹ \times ۱۰^{-۱۲} \times ۱۰^{-۱۰}}{۹ \times ۱۰^{-۹}} = ۳ \times ۱۰^{-۱۳} \text{ F} \times ۱۰^{۱۲} = ۰/۳ \text{ pF}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

خازنی به ظرفیت $10 \mu F$ دارای بار $2 mC$ بوده و بین صفحات آن هوا است. یک ذره با بار الکتریکی $q = 1 \mu C$ ، بین صفحات خازن از مجاورت صفحه مثبت، رها می‌شود. اگر جرم ذره 8 میلی گرم باشد، tendy آن در هنگام رسیدن به صفحه مقابل، چند متر بر ثانیه است؟

(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) $5\sqrt{2}$

(۴) ۱۰

مشاوره ترکیب کردن سوالات مربوط به میدان یکنواخت و کار و انرژی از سوژه‌های مورد علاقه طراح‌هاست، بنابراین توصیه می‌کنیم سوالات این مبحث را به خوبی کار کنید.

Hint

ابتدا اختلاف پتانسیل صفحات خازن $(V_+ - V_-)$ را از رابطه $(V = \frac{Q}{C})$ به دست آورید و سپس با استفاده از رابطه $(-\Delta K = \Delta U = q\Delta V)$ می‌توانید سرعت نهایی ذره را محاسبه کنید.

درسی Box

با اتصال یک خازن به یک باتری، می‌توانیم در آن بار الکتریکی ذخیره کنیم. پس از اتصال خازن به باتری، شارش بار الکتریکی در مدار تا زمانی ادامه می‌یابد که اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر اختلاف پتانسیل باتری شود. صفحه‌ای که به پایانه مثبت باتری متصل است، دارای بار مثبت و صفحه دیگر دارای بار منفی می‌شود.

وقتی می‌گوییم یک خازن دارای بار q است، یعنی یک صفحه آن بار $+q$ و یک صفحه آن بار $-q$ دارد.

ظرفیت خازن: نسبت بار ذخیره شده در یک خازن به اختلاف پتانسیل دو سر آن، مقدار ثابتی است که آن را ظرفیت خازن می‌نامند:

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$\text{کولن (C)} = \frac{\text{ولت (V)}}{\text{فاراد (F)}}$$

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا اختلاف پتانسیل دو سر خازن را به دست می‌آوریم:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C} \Rightarrow V = \frac{2 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-6}} = 200 V \Rightarrow V_+ - V_- = 200, V_- - V_+ = -200$$

گام دوم: با استفاده از قضیه پایستگی انرژی مکانیکی می‌توانیم سرعت ذره در صفحه مقابل را به دست آوریم. دقت کنید که ذره از صفحه مثبت به سمت صفحه منفی حرکت کرده؛ بنابراین $\Delta V = V_- - V_+$ است:

$$\Delta U = q\Delta V \Rightarrow \Delta U = 1 \times 10^{-6} \times -200 = -2 \times 10^{-4} J$$

$$|\Delta U| = |\Delta K| \xrightarrow{\Delta K = -\Delta U} \Delta K = +2 \times 10^{-4} J$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2) \Rightarrow +2 \times 10^{-4} = \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-6} (v_f^2 - 0) \Rightarrow v = 5\sqrt{2} m/s$$

۵۰ عایق بین صفحه‌های خازنی، هوا و اندازه میدان الکتریکی بین صفحات آن 60 V/mm است. اندازه چگالی سطحی بار الکتریکی هر یک از صفحه‌های این خازن در SI کدام است؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$)

۵/۴ × ۱۰^{-۴} (۲)

۵/۴ × ۱۰^{-۷} (۱)

۶ × ۱۰^{-۴} (۴)

۶ × ۱۰^{-۷} (۳)



Hint

درسی Box

با توجه به رابطه $(E = \frac{q}{\kappa\epsilon_0 A})$ که در درس باکس اثبات کردیم، نسبت $\frac{Q}{A}$ که همان چگالی سطحی بار الکتریکی است را به دست آورید.



میدان الکتریکی بین صفحات خازن:

بین صفحات هر خازن تخت، یک میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شود که اندازه آن از رابطه زیر قابل محاسبه است و همان طور که در شکل می‌بینید، جهت این میدان از صفحه دارای بار مثبت به سمت صفحه دارای بار منفی است:

$$E = \frac{V}{d}$$

E : میدان الکتریکی (V/m)

V : اختلاف پتانسیل بین دو صفحه خازن (V)

d : فاصله بین دو صفحه خازن (m)

همان طور که قبلاً خوانده‌اید، ظرفیت خازن در رابطه $C = \frac{q}{V}$ قرار می‌گیرد و از رابطه $C = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d}$ به دست می‌آید. حال با ترکیب این دو رابطه و ارتباط آن با فرمول محاسبه میدان الکتریکی بین صفحات خازن، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C = \frac{q}{V}, C = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow \frac{q}{V} = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow \frac{V}{d} = \frac{q}{\kappa\epsilon_0 A} \xrightarrow{E = \frac{V}{d}} E = \frac{q}{\kappa\epsilon_0 A}$$

همان طور که در درس باکس اثبات کردیم، رابطه بین میدان الکتریکی و بار الکتریکی درون خازن به صورت زیر است؛ بنابراین:

$$E = \frac{q}{\kappa\epsilon_0 A} \Rightarrow 60 \times 10^3 = \frac{q}{1 \times 9 \times 10^{-12} \times A}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{A} = 5/4 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \xrightarrow{\sigma = \frac{q}{A}} \sigma = 5/4 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در ماشین‌های چمن‌زنی برقی، برای مسافت‌های حداکثر تا ۳۵ m از سیم‌های مسی با قطر ۸ mm / ° و برای مسافت‌های طولانی‌تر، از سیم‌های مسی با قطر ۱/۲ mm استفاده می‌شود. مقاومت الکتریکی سیم یک ماشین چمن‌زنی به طول ۱۵ m چند برابر مقاومت الکتریکی سیم یک ماشین چمن‌زنی به طول ۴۵ m است؟

$$\frac{4}{27} \text{ (۴)}$$

$$\frac{27}{4} \text{ (۳)}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۱)}$$



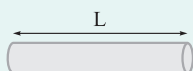
با استفاده از رابطه مقاومت سیم رسانا ($R = \rho \frac{L}{A}$) می‌توانید به صورت مقایسه‌ای، نسبت مقاومت دو سیم را به دست آورید.

Hint

درس‌Box

ساختمان مقاومت:

مقاومت الکتریکی یک سیم رسانا در دمای ثابت به سطح مقطع، طول و جنس آن بستگی دارد و از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$R = \rho \frac{L}{A}$$

R : مقاومت الکتریکی سیم (Ω)

ρ : مقاومت ویژه سیم ($\Omega \cdot m$)

L : طول سیم (m)

A : سطح مقطع سیم (m^2)

مقاومت یک سیم با طول و مقاومت ویژه آن رابطه مستقیم و با سطح مقطع آن رابطه عکس دارد:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2}$$

تذکر: با توجه به این‌که در سیم‌های با مقطع دایره‌ای، سطح مقطع برابر $A = \pi r^2$ می‌باشد؛ بنابراین مقاومت یک سیم فلزی استوانه‌ای با مجذور شعاع مقطع آن رابطه معکوس دارد:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$R = \rho \frac{L}{A} \xrightarrow{\text{جنس دو سیم یکسان}} \frac{R_2}{R_1} = \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

سیم ۱۵ متری را سیم (۲) و سیم ۴۵ متری را سیم (۱) می‌نامیم. با توجه به صورت سؤال قطر سیم (۲)، ۸ mm / ° و قطر سیم (۱) ۱/۲ mm است؛ بنابراین:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{15}{45} \times \left(\frac{1/2}{8}\right)^2 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{3}{4}$$

پاسخ خیلی تشریحی

دو سیم مسی هم جرم A و B به طور جداگانه به اختلاف پتانسیل یکسان و ثابتی وصل هستند. اگر شعاع مقطع سیم A برابر n شعاع مقطع سیم B باشد، در مدت معین، تعداد الکترون‌های عبوری از سیم A ، چند برابر تعداد الکترون‌های عبوری از سیم B است؟

$$n^2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{n^2} \quad (1)$$



$$n^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{n^4} \quad (3)$$

دانش‌Box

کوانتیده‌بودن بار الکتریکی: همواره بار الکتریکی یک جسم، مضرب درستی از یک مقدار پایه (بار بنیادی e) است و هر مقدار دلخواهی نمی‌تواند داشته باشد:

$$q = \pm ne, \quad e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

تعداد الکترون مبادله‌شده

علامت $+$: برای جسمی که الکترون از دست داده است.

علامت $-$: برای جسمی که الکترون گرفته است.

آهنگ شارش بار الکتریکی در رسانا، معادل با جریان الکتریکی متوسط عبوری از آن است:

$$\bar{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

$$\bar{I} = \frac{\text{کولن}}{\text{ثانیه}} = \text{آمپر}$$

$\bar{I}$: جریان الکتریکی متوسط برحسب آمپر (A)

Δq : بار الکتریکی خالص عبوری برحسب کولن (C)

Δt : مدت‌زمان برحسب ثانیه (s)

قانون اهم:

اگر مقاومت الکتریکی یک وسیله در ولتاژهای مختلف (در دمای ثابت) همواره مقدار ثابتی داشته باشد، به آن وسیله، مقاومت یا رسانای اهمی گفته می‌شود. به عبارت دیگر در وسیله‌هایی که از قانون اهم پیروی می‌کنند، نسبت اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها به شدت جریان عبوری از آن‌ها در دمای ثابت، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را مقاومت الکتریکی آن جسم می‌نامیم:

$$R = \frac{V}{I}$$

R : مقاومت الکتریکی برحسب اهم (Ω)

V : اختلاف پتانسیل برحسب ولت (V)

I : جریان الکتریکی برحسب آمپر (A)

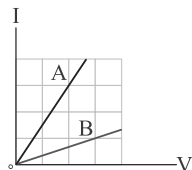
پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به درس‌بکس، دقت کنید که روابط زیر توسط کمیت‌های مشترک به هم ارتباط دارند:

$$q = ne \xrightarrow{I = \frac{q}{t}} I = \frac{ne}{t} \xrightarrow{R = \frac{V}{I}} R = \frac{Vt}{ne} \xrightarrow{R = \rho \frac{L}{A}} \rho \frac{L}{A} = \frac{Vt}{ne}$$

بنابراین:

$$\rho \frac{L}{\pi r^2} = \frac{Vt}{ne} \Rightarrow r^2 \propto n \Rightarrow \frac{n_A}{n_B} = \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 = n^2$$

نمودار جریان الكتریکی عبوری از دو رسانای A و B بر حسب اختلاف پتانسیل الكتریکی دو سر آنها به شکل زیر است. اگر این دو رسانا به طور جداگانه، به ترتیب، به اختلاف پتانسیل های الكتریکی V و ۲V وصل شوند، جریان الكتریکی عبوری از رسانای A، چند برابر جریان الكتریکی عبوری از رسانای B می شود؟



(۱) $\frac{9}{4}$

(۲) $\frac{4}{9}$

(۳) ۹

(۴) $\frac{1}{9}$

Hint

ابتدا مقاومت هر یک از رساناهای A و B را از روی نمودار به دست آورید ($\frac{1}{R}$ = شیب نمودار I-V). سپس با توجه به قانون اهم ($R = \frac{V}{I}$) نسبت جریان A به B را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** با توجه به قانون اهم ($R = \frac{V}{I}$) مقاومت هر یک از رساناهای A و B را از روی نمودار محاسبه می کنیم
(شیب نمودار I-V): $(R = \frac{1}{\text{شیب}})$

$$R_A = \frac{2}{3} R$$

$$R_B = 3R$$

گام دوم: حال با توجه به اتصال مقاومت A به اختلاف پتانسیل V و اتصال مقاومت B به اختلاف پتانسیل ۲V جریان عبوری از هر یک از آنها را به دست می آوریم:

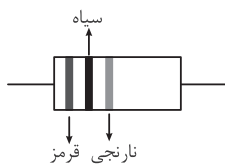
$$I = \frac{V}{R}$$

$$I_A = \frac{V}{\frac{2}{3}R} = \frac{3V}{2R}, \quad I_B = \frac{2V}{3R}$$

گام سوم: در نهایت نسبت $\frac{I_A}{I_B}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{4}$$

مقاومت الکتریکی مقاومت ترکیبی شکل زیر برابر با چه تعداد از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟



رنگ	سیاه	قرمز	نارنجی
کد	۰	۲	۳

الف) $۱۷\text{ k}\Omega$

ب) $۲۰\text{ k}\Omega$

پ) $۲۳\text{ k}\Omega$

ت) $۲۶\text{ k}\Omega$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

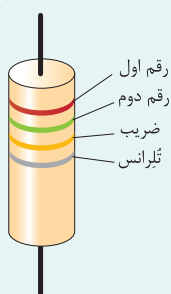
۴ (۴)



با استفاده از رابطه $(R = \overline{ab} \times 10^n)$ مقدار مقاومت را حساب کنید و با در نظر گرفتن تolerانس، محدوده مقاومت را تعیین کنید.

Hint

درس‌Box



مقاومت‌های ترکیبی: معمولاً از کربن، برخی نیم‌رساناها و یا لایه‌های نازک فلزی ساخته می‌شوند. این مقاومت‌ها را در اندازه‌های خاص استاندارد تولید می‌کنند و مقدار مقاومت آن‌ها یا روی آن‌ها نوشته می‌شود یا عمدتاً به صورت کدی رنگی که شامل ۳ یا ۴ حلقه رنگی است مشخص می‌شوند:

$$R = \overline{ab} \times 10^n$$

دقت کنید که حلقه چهارم یک حلقه طلایی یا نقره‌ای رنگ است که تolerانس نامیده می‌شود و مقدار مجاز انحراف از مقدار دقیق مقاومت را برحسب درصد مشخص می‌کند. نبود حلقه چهارم به معنای آن است که تolerانس ۲۰ درصد است.

$$R = 20 \times 10^3 \Omega = 20\text{ k}\Omega$$

چون حلقه چهارم در این مقاومت وجود ندارد پس ۲۰ درصد تolerانس داریم:

$$\Delta R = \frac{1}{5} \times 20 = 4\text{ k}\Omega \Rightarrow R = 20 \pm 4\text{ k}\Omega \Rightarrow 16\text{ k}\Omega \leq R \leq 24\text{ k}\Omega$$

بنابراین مقادیر «الف»، «ب» و «پ» می‌توانند مقدار مقاومت کربنی باشند.

پاسخ خیلی تشریحی

۵۵

مقاومت یک قطعه سیم آلومینیومی در دمای 10°C برابر 25Ω است. از این سیم جریان الکتریکی عبور می‌کند و در اثر افزایش دما، مقاومت الکتریکی آن به $27/2\Omega$ می‌رسد. دمای سیم در این حالت، چند درجه سلسیوس است؟ ($\alpha_{Al} = 4/4 \times 10^{-3} \text{K}^{-1}$)

۲۰ (۱)

۳۰ (۲)

۴۰ (۳)

۵۰ (۴)



Hint

درس‌Box

با استفاده از رابطه $(R_T = R_1(1 + \alpha\Delta\theta))$ می‌توانید مقدار تغییر دما و در نتیجه دمای نهایی سیم را به دست آورید. اگر یک رسانای فلزی داشته باشیم، با افزایش دمای آن، تعداد الکترون‌های آزاد آن ثابت می‌ماند ولی ارتعاشات کاتوره‌ای اتم‌ها و یون‌های آن افزایش می‌یابد. این عامل موجب برخورد بیشتر حامل‌های بار با شبکه اتمی رسانای فلزی می‌شود و به این ترتیب مقاومت رسانا در برابر عبور جریان زیاد می‌شود.

$$R_T = R_1(1 + \alpha\Delta T)$$

R_T : مقاومت ثانویه (Ω)

R_1 : مقاومت اولیه (Ω)

α : ضریب دمایی مقاومت K^{-1}

ΔT : تغییرات دما (K)

تغییرات دما برحسب درجه سلسیوس

$$\Delta\theta = \Delta T$$

تغییرات دما برحسب کلوین

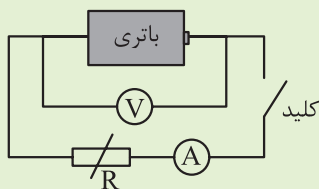


پاسخ خیلی تشریحی

$$R_T = R_1(1 + \alpha\Delta\theta) \Rightarrow 27/2 = 25(1 + 4/4 \times 10^{-3} \times \Delta\theta) \Rightarrow 27/2 = 25 \times 4/4 \times 10^{-3} \times \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = 2^{\circ}\text{C} \Rightarrow \theta_T - \theta_1 = 2^{\circ}\text{C} \Rightarrow \theta_T - 10 = 2^{\circ}\text{C} \Rightarrow \theta_T = 12^{\circ}\text{C}$$

در مدار شکل زیر، در حالتی که کلید باز است، ولت‌سنج آرمانی $19V$ و در حالتی که کلید بسته است، ولت‌سنج $17V$ و آمپرسنج آرمانی $2A$ را نشان می‌دهد. مقاومت درونی باتری چند اهم است؟



(۱) 0.5

(۲) 1

(۳) 1.5

(۴) 2

مشاوره در مبحث مدارها قرار دادن یک آمپرسنج و ولت‌سنج داخل مدار بسیار مرسوم است و توصیه می‌کنیم به خوبی نکات مربوط به آن‌ها را یاد بگیرید.

Hint

درس‌Box

جریان مدار $2A$ و نیروی محرکه مولد $\mathcal{E} = 19V$ است، بنابراین از رابطه $V = \mathcal{E} - rI$ مقاومت درونی مولد را به دست آورید.

آمپرسنج در مدار به صورت سری بسته می‌شود و جریان کل مدار را نشان می‌دهد:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r}$$

مقاومت آمپرسنج آرمانی صفر است؛ بنابراین اگر به اشتباه آن را در مدار به صورت موازی ببندیم مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند و شاخه‌ای از مدار که به آمپرسنج وصل شده از مدار حذف می‌شود.

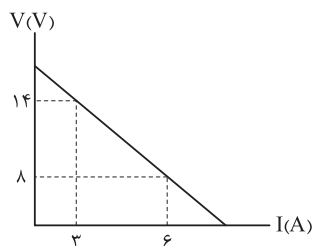
ولت‌سنج در مدار به صورت موازی به هر جزء بسته می‌شود. اگر ولت‌سنج به مقاومت متصل شود، عدد RI را نشان می‌دهد و اگر به مولد متصل شود در صورتی که جریان در مدار برقرار نباشد نیروی محرکه مولد ($\mathcal{E}$) را نشان می‌دهد و اگر جریان در مدار برقرار باشد، ولت‌سنج عدد $V = \mathcal{E} - rI$ را نشان می‌دهد. اگر به اشتباه ولت‌سنج آرمانی را در مدار به صورت سری ببندیم به دلیل این که مقاومت آن بی‌نهایت است جریان در آن شاخه از مدار صفر می‌شود.

در حالت اول که کلید باز است و $I = 0$ است، ولت‌سنج، نیروی محرکه مولد را نشان می‌دهد؛ بنابراین $\mathcal{E} = 19V$. وقتی کلید را می‌بندیم:

$$V = \mathcal{E} - rI \Rightarrow 17 = 19 - r(2) \Rightarrow r = 1\Omega$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک باتری بر حسب جریان گذرنده از آن، به شکل زیر است. اگر یک مقاومت ۳ اهمی به دو سر این باتری ببندیم، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری چند ولت می‌شود؟



(۱) ۶

(۲) ۸

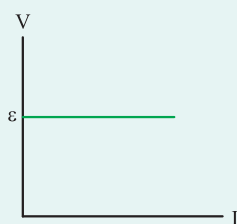
(۳) ۱۲

(۴) ۱۶

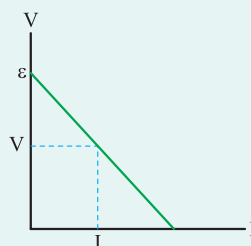


درس Box

نمودار ولتاژ دو سر باتری بر حسب شدت جریان عبوری از آن در دو حالت باتری ایده‌آل ($r = 0$) و غیرایده‌آل ($r \neq 0$) به صورت زیر است:



$$r = 0 \Rightarrow V = \varepsilon \text{ ولتاژ دو سر باتری}$$



$$r \neq 0 \Rightarrow V = \varepsilon - rI \text{ ولتاژ دو سر باتری}$$

$$\text{شیب نمودار} = \frac{\varepsilon - V}{I} = \frac{rI}{I} = r$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا شیب نمودار که همان مقاومت درونی مولد است را به دست آورده و سپس نیروی محرکه مولد را محاسبه می‌کنیم:

$$r = \frac{14 - 8}{6 - 3} = 2 \Omega$$

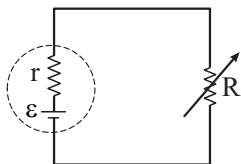
$$V = \varepsilon - rI \Rightarrow 14 = \varepsilon - (2)(3) \Rightarrow \varepsilon = 20 \text{ V}$$

گام دوم: حال براساس مقاومت ۳ اهم، جریان عبوری از باتری را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \Rightarrow I = \frac{20}{3 + 2} = 4 \text{ A}$$

$$V = \varepsilon - rI \Rightarrow V = 20 - (2)(4) = 12 \text{ V}$$

در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوستا از R به $2R$ برسد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری، 20% درصد افزایش می‌یابد. R چند برابر مقاومت درونی باتری است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



درس‌Box

در مدارهایی که باتری فقط به یک مقاومت متصل است، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت با اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر است و به صورت زیر نیز می‌تواند به دست آید:

$$V = \varepsilon - rI = RI \Rightarrow V = \frac{\varepsilon R}{R + r}$$

گام اول: ولتاژ دو سر مولد را در دو حالت محاسبه می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

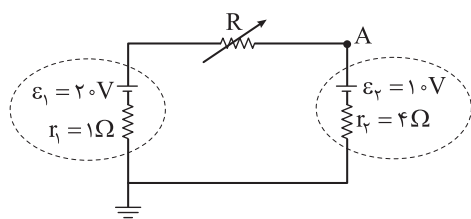
$$V = \frac{\varepsilon R}{R + r} \Rightarrow V_1 = \frac{\varepsilon R}{R + r}, \quad V_2 = \frac{2\varepsilon R}{r + 2R}$$

گام دوم: با توجه به این که اختلاف پتانسیل دو سر مولد 20% درصد افزایش داشته است:

$$\frac{V_2}{V_1} = 1/2 \Rightarrow \frac{\frac{2\varepsilon R}{r + 2R}}{\frac{\varepsilon R}{R + r}} = \frac{6}{5} \Rightarrow 6r + 12R = 10r + 10R$$

$$2R = 4r \Rightarrow R = 2r$$

در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوسا از مقادیر بسیار بزرگ تا صفر کاهش یابد، پتانسیل الکتریکی نقطه A چند ولت و چگونه تغییر می کند؟



(۱) ۲، کاهش می یابد.

(۲) ۸، کاهش می یابد.

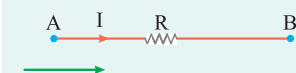
(۳) ۲، افزایش می یابد.

(۴) ۸، افزایش می یابد.



درس Box

هرگاه در مدار در جهت جریان از مقاومت R یا r بگذریم، پتانسیل الکتریکی به اندازه RI یا rI کاهش می یابد و اگر در خلاف جهت جریان حرکت کنیم پتانسیل الکتریکی به همان اندازه افزایش می یابد:



$$V_A - RI = V_B$$



$$V_B + RI = V_A$$

در هنگام عبور از درون باتری و از قطب منفی به مثبت، پتانسیل الکتریکی به اندازه نیروی محرکه افزایش می یابد و بالعکس؛ بنابراین در پتانسیل نویسی بین دو نقطه هنگامی که به قطب منفی باتری رسیدیم، علامت مثبت می گذاریم و بالعکس.

توجه شود که این موضوع از جهت جریان مستقل است و در عملیات پتانسیل نویسی با مقاومت درونی باتری مانند یک مقاومت خارجی رفتار می کنیم:

جهت حرکت برای پتانسیل نویسی



$$V_A + \varepsilon - rI = V_B$$

جهت حرکت برای پتانسیل نویسی



$$V_B - \varepsilon + rI = V_A$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ در حالت اول اگر مقاومت را بی نهایت فرض کنیم، داریم:

$$R = \infty \Rightarrow I = 0 \Rightarrow V_A = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 10 \text{ V}$$

و در حالت دوم، اگر $R = 0$ باشد، داریم:

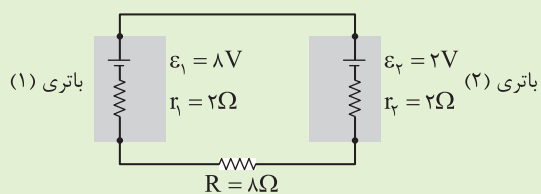
$$R = 0 \Rightarrow I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1 + r_2} = \frac{20 - 10}{1 + 4} \Rightarrow I = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

$$V'_A - \varepsilon_2 - r_2 I = 0 \Rightarrow V'_A - 10 - 8 = 0 \Rightarrow V'_A = 18 \text{ V}$$

$$\Delta V_A = V'_A - V_A = 18 - 10 = 8 \text{ V}$$

بنابراین:

۶۰. در مدار شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۱)، چند برابر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۲) است؟



(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) $\frac{7}{4}$

(۴) $\frac{7}{3}$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا جریان عبوری از مدار را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R} \Rightarrow I = \frac{8 - 2}{2 + 2 + 8} = 0.5 \text{ A}$$

گام دوم: اختلاف پتانسیل دو سر مولدهای ε_1 و ε_2 را به دست می‌آوریم:

$$V_1 = \varepsilon_1 - r_1 I$$

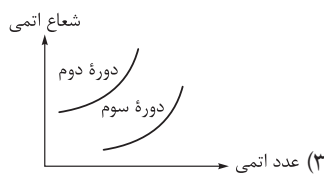
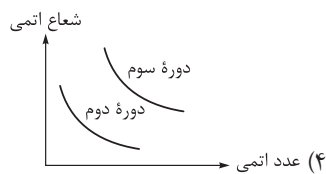
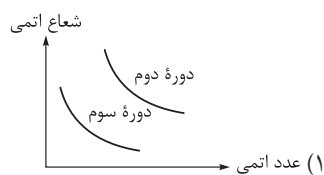
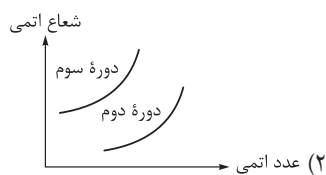
$$V_1 = 8 - 2 \times 0.5 = 7 \text{ V}$$

$$V_2 = \varepsilon_2 + r_2 I \quad (\text{چرا؟})$$

$$V_2 = 2 + 2 \times 0.5 = 3 \text{ V}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{3}$$

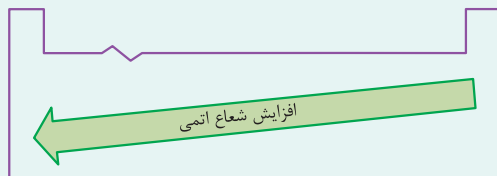
کدام نمودار دربارهٔ روند کلی تغییر شعاع اتمی عنصرهای دوره‌های دوم و سوم جدول تناوبی، درست است؟



روند تغییر شعاع اتمی در جدول دوره‌ای

درس Box

در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی عنصرها کاهش و در یک گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد؛ بنابراین هر چه عنصری در جدول دوره‌ای به سمت چپ‌تر و پایین‌تر باشد؛ شعاع آن بیشتر است و بالعکس!



می‌دانیم که در یک گروه جدول از بالا به پایین و با افزایش عدد اتمی عنصرها، شعاع اتمی بیشتر می‌شود؛ بنابراین منحنی بالایی مربوط به عنصرهای دوره سوم و منحنی پایینی، مربوط به عنصرهای دوره دوم جدول است. (رد گزینه‌های (۱) و (۳)) از طرفی در یک دوره جدول از چپ به راست و با افزایش عدد اتمی عنصرها، شعاع اتمی کمتر می‌شود؛ بنابراین نمودار شعاع اتمی برحسب عدد اتمی، نزولی است و فقط گزینه (۴) درست می‌باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

چه تعداد از ویژگی‌های زیر را می‌توان به بیش از نیمی از عنصرهای دوره سوم جدول تناوبی نسبت داد؟

یعنی ۵ عنصر یا بیشتر (دوره سوم ۸ عنصر دارد).

- هم گروه بودن با حداقل یک عنصر واسطه
- داشتن سطح صیقلی و براق
- تشکیل یون تک‌اتمی با آرایش گاز نجیب
- جامد بودن در دما و فشار اتاق
- توانایی از دست دادن الکترون

مشاوره یکی از مباحث مهم ابتدای فصل ۱، تسلط کامل بر عنصرهای دوره سوم و گروه ۱۴ جدول تناوبی می‌باشد.

۵ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

عنصرهای دوره سوم از سدیم (Na) و منیزیم (Mg) که متعلق به دسته S هستند، شروع می‌شود و با عنصرهای دسته p ادامه می‌یابد. این دوره شامل ۸ عنصر با عددهای اتمی ۱۱ تا ۱۸ است.

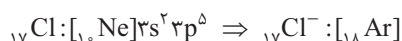
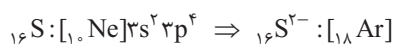
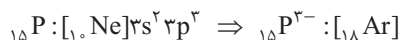
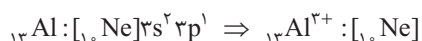
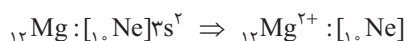
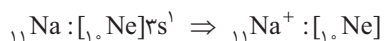
فلز		شبه‌فلز		نافلز			
۱۱ Na سدیم	۱۲ Mg منیزیم	۱۳ Al آلومینیم	۱۴ Si سیلیسیم	۱۵ P فسفر	۱۶ S گوگرد	۱۷ Cl کلر	۱۸ Ar آرگون

- در دوره سوم جدول تناوبی:
- ۸ عنصر وجود دارد.
 - ۳ فلز، ۱ شبه‌فلز و ۴ نافلز وجود دارد.
 - ۴ عنصر (فلزها و شبه‌فلز) سطح صیقلی و براق دارند.
 - در دما و فشار اتاق، ۶ عنصر به حالت جامد و ۲ عنصر به حالت گازند.
 - ۶ عنصر می‌توانند یون تک‌اتمی تشکیل دهند.
 - زیر لایه‌های ۳s و ۳p در عنصرها در حال پر شدن هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ویژگی‌های سوم و چهارم را می‌توان به بیش از نیمی از عنصرهای دوره سوم جدول تناوبی نسبت داد.

بررسی موارد:

- عناصر واسطه در گروه‌های ۳ تا ۱۲ جدول تناوبی قرار دارند؛ در صورتی که عناصر دوره سوم، در گروه‌های ۱، ۲ و ۱۳ تا ۱۸ جدول جای دارند؛ بنابراین می‌توان گفت که هیچ‌یک از عنصرهای دوره سوم جدول تناوبی با عناصر واسطه هم‌گروه نیستند. ✗
- در دوره سوم جدول تناوبی، ۸ عنصر وجود دارد که سه عنصر فلزی آن یا همان عناصر سدیم (Na)، منیزیم (Mg) و آلومینیم (Al) و یک عنصر شبه‌فلزی آن یا همان سیلیسیم (Si)، سطح صیقلی و براق دارند؛ پس نسبت تعداد این عناصر به تعداد کل آن‌ها، برابر $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ است که این مقدار از نیم بیشتر نمی‌باشد. ✗
- به‌جز شبه‌فلز سیلیسیم (Si) که الکترون به اشتراک می‌گذارد و به یون تک‌اتمی تبدیل نمی‌شود و گاز نجیب آرگون (Ar) که تمایلی به انجام واکنش ندارد، بقیه عنصرهای دوره سوم، می‌توانند یون تک‌اتمی با آرایش گاز نجیب تشکیل دهند. نسبت تعداد این عناصر به تعداد کل آن‌ها، برابر $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ است که این مقدار از نیم بیشتر می‌باشد. ✓



- به جز عناصر گازی کلر ($_{17}\text{Cl}$) و آرگون ($_{18}\text{Ar}$)، بقیه عناصر دوره سوم، در دما و فشار اتاق، جامد هستند؛ پس نسبت تعداد این عناصر به تعداد کل آنها، برابر $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ است که این مقدار از نیم بیشتر می باشد. ✓
- از میان ۸ عنصر دوره سوم جدول تناوبی، سه عنصر فلزی آن که شامل عناصر سدیم ($_{11}\text{Na}$)، منیزیم ($_{12}\text{Mg}$) و آلومینیم ($_{13}\text{Al}$) است، الکترون از دست می دهند و با تشکیل کاتیون به پایداری می رسند؛ پس نسبت تعداد این عناصر به تعداد کل آنها برابر $\frac{3}{8}$ است که این مقدار از نیم بیشتر نمی باشد. ✗

همه نافلزها به جز گازهای نجیب در شرایط مناسب، تمایل به گرفتن و یا به اشتراک گذاشتن الکترون و اغلب فلزها در شرایط مناسب، تمایل به از دست دادن الکترون و تبدیل شدن به کاتیون دارند.



درباره ترکیبی با فرمول شیمیایی C_6H_{12} ، کدام مورد نادرست است؟

اتن (C_2H_4)

(۱) این مولکول همانند ترکیبی با عنوان عمل آورنده کشاورزی، ممکن است رنگ قرمز برم مایع را از بین ببرد.

(۲) در اثر سوختن کامل هر مول از این هیدروکربن، ۹ مول گاز اکسیژن مصرف می‌شود.

(۳) در ساختار آن به یقین، اتم کربنی وجود ندارد که به یک اتم هیدروژن متصل شده باشد.

(۴) در ساختار این ترکیب، قطعاً نسبت تعداد پیوندهای $C-H$ به تعداد پیوندهای $C-C$ ، کم‌تر از ۴ است.



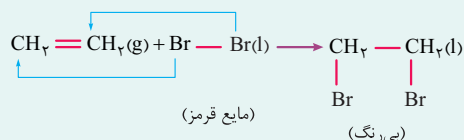
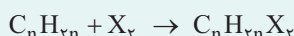
آلکن‌ها و سیکلوآلکان‌ها

دانش‌Box

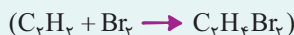
فرمول مولکولی سیکلوآلکان‌ها و آلکن‌های هم‌کربن مشابه است (C_nH_{2n})، ولی این دو دسته از هیدروکربن‌ها، ساختار متفاوتی دارند؛ بنابراین آلکن‌ها و سیکلوآلکان‌های هم‌کربن، ایزومر هستند. از اون جایی که سیکلوآلکان‌ها سیرشده هستند، برخلاف آلکن‌ها با H_2 و Br_2 واکنش نمی‌دهند.

آلکن‌ها به دلیل داشتن پیوند دوگانه کربن - کربن، سیرنشده هستند؛ چون هر یک از این دو اتم کربن مربوط به پیوند دوگانه، به ۳ اتم متصل هستند و تمایل دارند به ۴ اتم متصل شوند؛ به همین دلیل آلکن‌ها واکنش‌پذیری بیشتری از آلکان‌ها داشته و در واکنش‌های شیمیایی گوناگونی شرکت می‌کنند. از واکنش‌های آلکن‌ها، می‌توان به واکنش افزایش هالوژن‌ها به آن‌ها اشاره کرد:

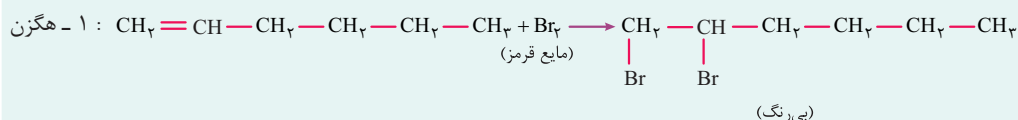
در این واکنش، پیوند یگانه بین دو اتم هالوژن در مولکول دواتمی هالوژن و یکی از پیوندها در پیوند دوگانه کربن - کربن شکسته شده و دو اتم هالوژن با پیوند یگانه به اتم‌های کربن وصل می‌شوند.



مثال: در اثر واکنش برم مایع با گاز اتن، ترکیب سیرشده ۱، ۲-دی‌برمو اتان به دست می‌آید. برم مایع قرمز رنگ است که در اثر انجام این واکنش و مصرف آن و تولید فراورده بی‌رنگ، رنگ قرمز آن از بین می‌رود.



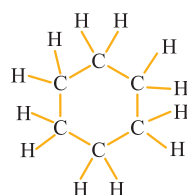
با اضافه کردن مقداری مایع بی‌رنگ ۱ - هگزن به برم قرمز رنگ، می‌توان رنگ برم را از بین برد:



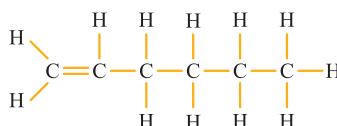
بررسی سایر گزینه‌ها: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): از گاز اتن که اولین عضو خانواده آلکن‌هاست، به عنوان عمل آورنده کشاورزی استفاده می‌شود؛ این ترکیب همانند هگزن که نوعی آلکن محسوب می‌شود؛ می‌تواند رنگ قرمز برم را از بین ببرد.

ترکیبی با فرمول شیمیایی C_6H_{12} می‌تواند سیکلوهگزان از خانواده سیکلوآلکان‌ها یا هگزن (۱ - هگزن، ۲- هگزن یا ۳ - هگزن) از خانواده آلکن‌ها باشد که در ساختار سیکلوهگزان، همه اتم‌های کربن، به دو اتم هیدروژن متصل شده‌اند و اتم کربنی وجود ندارد که به یک اتم هیدروژن متصل شده باشد؛ در صورتی که در ساختار هگزن، اتم‌های کربن به یک یا دو یا سه اتم هیدروژن متصل شده‌اند.



سیکلوهگزان (C_6H_{12})



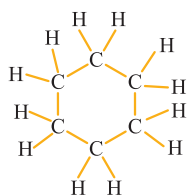
۱- هگزن (C_6H_{12})

گزینه (۲): با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش سوختن کامل ترکیب مورد نظر، در اثر سوختن هر مول هیدروکربن، ۹ مول



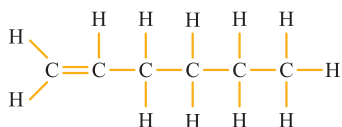
اکسیژن مصرف می‌شود:

گزینه (۴): نسبت تعداد پیوندهای C—H به تعداد پیوندهای C—C در ساختار ترکیبهای سیکلوهگزان و هگزن به ترتیب برابر ۲ و ۳ است که هر دو نسبت کم‌تر از ۴ می‌باشد:



$$\frac{\text{تعداد پیوندهای C—H}}{\text{تعداد پیوندهای C—C}} = \frac{12}{6} = 2$$

سیکلوهگزان (C_6H_{12})

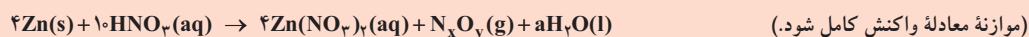


$$\frac{\text{تعداد پیوندهای C—H}}{\text{تعداد پیوندهای C—C}} = \frac{14}{4} = 3.5$$

۱- هگزان (C_6H_{14})

براساس واکنش زیر، برای تولید ۱/۱ لیتر فراورده گازی با چگالی ۲ گرم بر لیتر، چند گرم فلز روی نیاز است؟ (بازده واکنش را ۸۰ درصد

در نظر بگیرید: $(Zn = ۶۵, O = ۱۶, N = ۱۴ : g.mol^{-1})$



(۲) $۱۶/۲۵$

(۱) $۱۳/۱۰۰$

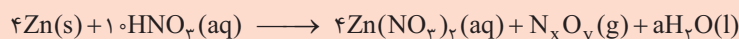
(۴) $۲۰/۳۰$

(۳) $۱۹/۱۰۰$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا معادله واکنش انجام شده را به صورت کامل موازنه می کنیم تا فرمول شیمیایی فراورده گازی واکنش مشخص شود، که این عمل با موازنه کردن تعداد اتم های تک تک عناصرها در معادله واکنش اتفاق می افتد:



Zn موازنه اتم: $۴ = ۴$ ✓

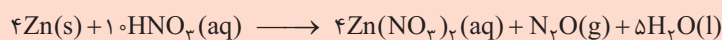
H موازنه اتم: $۱۰ = ۲a \Rightarrow a = \frac{۱۰}{۲} = ۵$

N موازنه اتم: $۱۰ = ۸ + x \Rightarrow x = ۱۰ - ۸ = ۲$

O موازنه اتم: $۳۰ = ۲۴ + y + a \Rightarrow y = ۳۰ - ۲۴ - ۵ = ۱$

$\Rightarrow N_xO_y : N_2O$

گام دوم: با توجه به معادله موازنه شده واکنش، حجم گاز N_2O تولید شده، چگالی آن و بازده درصدی واکنش، جرم فلز روی مورد نیاز برای انجام واکنش را محاسبه می کنیم:



$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ \Rightarrow N_2O = ۱/۱ \times \frac{۱۰۰}{۸۰} L$

$۱/۱ \times \frac{۱۰۰}{۸۰} L N_2O \times \frac{۲ g N_2O}{۱ L N_2O} \times \frac{۱ mol N_2O}{۴۴ g N_2O} \times \frac{۴ mol Zn}{۱ mol N_2O} \times \frac{۶۵ g Zn}{۱ mol Zn} \times \frac{۱۰۰}{۸۰} = ۱۶/۲۵ g Zn$

استفاده از کسر تناسب:

به جور دیگر

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{۱۰۰} = \frac{\text{حجم} \times \text{چگالی}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x \times \frac{۸۰}{۱۰۰}}{\cancel{۴} \times ۶۵} = \frac{۲ \times \cancel{۱/۱}}{۱ \times \cancel{۴۴}} \Rightarrow x = \frac{۶۵}{۴} = \frac{۶۴}{۴} + \frac{۱}{۴} = ۱۶/۲۵ g Zn$$

۶۵ کدام مطلب درست است؟

(۱) گرمای ویژه همه مواد گازی از گرمای ویژه مواد جامد، کم تر است. **ظرفیت گرمایی**

(۲) هر چه حاصل ضرب جرم در گرمای ویژه یک جسم کم تر باشد؛ مقاومت آن جسم در برابر تغییر دما بیشتر خواهد بود.

(۳) میانگین انرژی جنبشی مولکول‌های یک لیوان آب در دمای اتاق، نسبت به یک قطره آب در دمای اتاق، بیشتر است.

(۴) اگر به جرم برابری از نان و سیب‌زمینی در دمای اتاق، گرمای یکسانی دهیم، در مدت‌زمان برابر، تغییر دمای سیب‌زمینی کم تر خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بخش عمده نان و سیب‌زمینی را نشاسته تشکیل می‌دهد. از طرفی آب موجود در سیب‌زمینی، بیشتر از آب موجود در نان است؛ پس می‌توان گفت که گرمای ویژه سیب‌زمینی در مقایسه با گرمای ویژه نان، بیشتر می‌باشد. حالا اگر مقداری نان و سیب‌زمینی را با جرم و سطح یکسان در دمای اتاق داشته باشیم و به آن‌ها گرمای یکسانی دهیم، نان به علت داشتن گرمای ویژه کم تر نسبت به سیب‌زمینی، زودتر گرما از دست می‌دهد و سریع تر با محیط هم‌دما می‌شود؛ بنابراین در مدت‌زمان برابر، تغییرات دمایی سیب‌زمینی، کم تر و تغییرات دمایی نان، بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): نمی‌توان گفت که گرمای ویژه همه مواد گازی از گرمای ویژه مواد جامد کم تر است؛ زیرا به طور مثال گرمای ویژه گاز اکسیژن، بیشتر از گرمای ویژه فلزهای آلومینیم، نقره و طلا می‌باشد.

ماده	گرمای ویژه ($J \cdot g^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$)	ماده	گرمای ویژه ($J \cdot g^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$)
آب	۴ / ۱۸۴	آلومینیم	۰ / ۹۰۰
سدیم کلرید	۰ / ۸۵۰	نقره	۰ / ۲۳۶
اتانول	۲ / ۴۳۰	طلا	۰ / ۱۲۸
کربن دی‌اکسید	۰ / ۸۴۰	اکسیژن	۰ / ۹۲۰

گزینه (۲): حاصل ضرب جرم در گرمای ویژه یک جسم، همان ظرفیت گرمایی آن است. هر چه ظرفیت گرمایی یک جسم کم تر باشد؛ دمای جسم زودتر تغییر می‌کند و مقاومت آن جسم در برابر تغییر دما کم تر خواهد بود.

گزینه (۳): میانگین انرژی جنبشی مولکول‌ها در دو نمونه هم‌دما، یکسان است؛ بنابراین با توجه به برابری دمای مولکول‌های آب در یک لیوان و یک قطره آب، میانگین انرژی جنبشی مولکول‌های آب در آن‌ها برابر می‌باشد.

در یک آلکین، درصد جرمی اتم‌های هیدروژن برابر ۱۲/۵٪ است. چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ آلکین مورد نظر، درست است؟

$$(C = 12, H = 1 : g.mol^{-1})$$

• نام آن می‌تواند ۴ - هپتین باشد.

بنزن (C_6H_6)

• جرم مولی این آلکین از جرم مولی آلکان هم‌کربن خود، ۴ درصد کم‌تر است.

• تفاوت تعداد اتم‌های کربن در ترکیب مورد نظر با تعداد اتم‌های کربن در سرگروه آروماتیک‌ها برابر ۳ است.

• شمار گروه‌های CH_3 در ساختار این هیدروکربن می‌تواند با شمار گروه‌های CH_3 در ساختار ۳،۲ - دی‌متیل بوتان برابر باشد.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

موارد دوم و چهارم درست هستند.

فرمول عمومی آلکین‌ها به صورت C_nH_{2n-2} است؛ بنابراین با توجه به درصد جرمی اتم‌های هیدروژن در آلکین مورد نظر، می‌توان فرمول شیمیایی آن را به دست آورد:

$$\begin{aligned} \text{درصد جرمی اتم‌های هیدروژن} &= \frac{\text{جرم اتم‌های هیدروژن}}{\text{جرم کل آلکین مورد نظر}} \times 100 = \frac{2n-2}{14n-2} \times 100 \\ \Rightarrow 12/5 &= \frac{2n-2}{14n-2} \times 100 \Rightarrow \frac{2n-2}{14n-2} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} \\ \Rightarrow 16n-16 &= 14n-2 \Rightarrow n=7 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ فرمول شیمیایی آلکین مورد نظر: C_7H_{12}

بررسی عبارت‌ها:

• نام ۴ - هپتین برای آلکینی وجود ندارد و به جای این نام، باید از نام ۳ - هپتین استفاده کرد؛ زیرا در آلکین‌های راست‌زنجیر از کربن به بالا یعنی از C_4H_{10} به بعد، پیوند سه‌گانه می‌تواند بین دو کربن کنار هم با موقعیت‌های مختلف در زنجیر قرار بگیرد. به همین دلیل باید زنجیرهٔ هیدروکربنی را از سمتی شماره‌گذاری کنیم که زودتر به پیوند سه‌گانه برسیم و باید شمارهٔ نخستین کربنی که پیوند سه‌گانه به آن متصل است را بنویسیم:



• آلکان هم‌کربن با آلکین مورد نظر، هپتان با فرمول شیمیایی C_7H_{16} است:

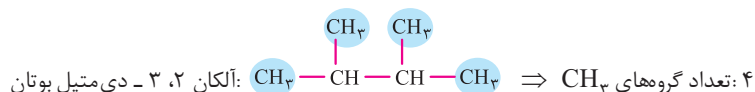
$$C_7H_{12} \text{ آلکین مولی اتم‌های هیدروژن: } (7 \times 12) + (12 \times 1) = 96 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$C_7H_{16} \text{ آلکان مولی اتم‌های هیدروژن: } (7 \times 12) + (16 \times 1) = 100 \text{ g.mol}^{-1}$$

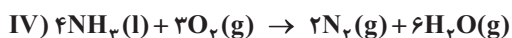
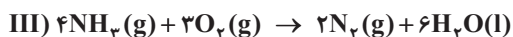
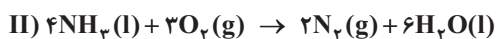
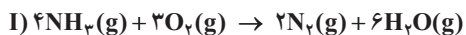
$$\Rightarrow \text{درصد اختلاف جرم مولی آلکین و آلکان ۷ کربنه} = \frac{C_7H_{16} \text{ جرم مولی} - C_7H_{12} \text{ جرم مولی}}{C_7H_{16} \text{ جرم مولی}} \times 100 = \frac{100-96}{100} \times 100 = 4$$

• سرگروه ترکیب‌های آروماتیک، بنزن با فرمول شیمیایی C_6H_6 است که تفاوت تعداد اتم‌های کربن در این ترکیب با تعداد اتم‌های کربن در آلکین مورد نظر (C_7H_{12})، برابر $7-6=1$ می‌باشد.

• تنها ساختار ۱ - هپتین آلکین مورد نظر دارای ۴ گروه CH_3 است؛ از طرفی شمار گروه‌های CH_3 در ۳،۲ - دی‌متیل بوتان برابر ۴ می‌باشد.



با فرض این که گرمای لازم برای تبخیر یک مول آمونیاک مایع، نصف گرمای لازم برای تبخیر یک مول آب است، مقایسه مقدار گرمای مبادله شده در واکنش‌های زیر، در کدام گزینه به درستی نشان داده شده است؟ (همه واکنش‌های داده شده، گرماده هستند.)



IV > II > I > III (۲)

II > III > IV > I (۱)

III > II > I > IV (۴)

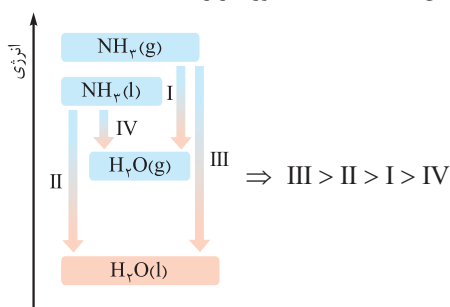
III > I > II > IV (۳)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ همه واکنش‌های داده شده، گرماده هستند. تنها با این تفاوت که حالت فیزیکی NH_3 و H_2O در آن‌ها فرق می‌کند. از آن جایی که سطح انرژی یک ماده در حالت مایع، پایین‌تر از سطح انرژی همان ماده در حالت گاز است؛ پس خواهیم داشت:

سطح انرژی: $\text{NH}_3(\text{g}) > \text{NH}_3(\text{l})$, $\text{H}_2\text{O}(\text{g}) > \text{H}_2\text{O}(\text{l})$

از طرفی گرمای تبخیر مولی آمونیاک، نصف گرمای تبخیر مولی آب است؛ بنابراین برای تبخیر یک مول آب در مقایسه با تبخیر یک مول آمونیاک، گرمای بیشتری لازم است؛ پس می‌توان گفت که تفاوت سطح انرژی $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ و $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$ ، بیشتر از تفاوت سطح انرژی $\text{NH}_3(\text{l})$ و $\text{NH}_3(\text{g})$ می‌باشد. لازم به ذکر است که در معادله موازنه شده واکنش، ضریب استوکیومتری آب، $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ و ضریب استوکیومتری آمونیاک می‌باشد؛ در نتیجه نمودار سطح انرژی واکنش‌های داده شده به صورت زیر است:



همان‌طور که مشاهده می‌کنید، به راحتی می‌توان فهمید که واکنش سوم، بیشترین مقدار گرمای مبادله شده و واکنش چهارم کم‌ترین مقدار گرمای مبادله شده را دارد (رد گزینه‌های (۱) و (۲))، اما برای مقایسه مقدار گرمای مبادله شده در واکنش‌های اول و دوم باید حواستان به مقایسه گرمای تبخیر مولی آمونیاک و آب باشد!

برای افزایش دمای ۱۰ گرم از هر یک از ماده‌های A و B به اندازه ۱۰ درجه سلسیوس، به ترتیب ۸۰۰ و ۴۰۰ ژول گرما نیاز است. اگر برای بالارفتن دمای ۱۰ گرم مخلوطی از این دو ماده به اندازه ۱۰ درجه سلسیوس، ۶۵۰ ژول گرما لازم باشد؛ اختلاف جرم دو ماده A و B در مخلوط مورد نظر چند گرم است؟ (گرمای ویژه دو ماده A و B با مخلوط شدن تغییر نکرده است.)

۴/۵ (۴)

۶/۲۵ (۳)

۳/۷۵ (۲)

۲/۵ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به جرم دو ماده A و B، مقدار افزایش دمای آن‌ها و گرمای مورد نیاز برای این مواد با استفاده از رابطه $Q = mc\Delta\theta$ ، گرمای ویژه دو ماده مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$Q_A = m_A c_A \Delta\theta_A \Rightarrow 800 = 10 \times c_A \times 10 \Rightarrow c_A = \frac{800}{10 \times 10} = 8 \text{ J.g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$Q_B = m_B c_B \Delta\theta_B \Rightarrow 400 = 10 \times c_B \times 10 \Rightarrow c_B = \frac{400}{10 \times 10} = 4 \text{ J.g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$$

گام دوم: از آنجایی که گرمای مورد نیاز برای بالارفتن دمای یک مخلوط متشکل از دو ماده از مجموع گرمای مورد نیاز برای بالارفتن دمای هر یک از مواد تشکیل‌دهنده مخلوط به دست می‌آید؛ پس با توجه به جرم مخلوط مورد نظر، مقدار افزایش دمای آن و گرمای مورد نیاز برای این مخلوط، با استفاده از رابطه $Q = mc\Delta\theta$ ، جرم هر یک از مواد A و B و سپس اختلاف جرم آن‌ها را در مخلوط مورد نظر محاسبه می‌کنیم:

$$m_A + m_B = 10 \Rightarrow m_B = 10 - m_A$$

$$Q_{\text{مخلوط}} = Q_A + Q_B$$

$$Q_{\text{مخلوط}} = (m_A c_A \Delta\theta_A) + (m_B c_B \Delta\theta_B)$$

$$\Rightarrow 650 = (m_A \times 8 \times 10) + ((10 - m_A) \times 4 \times 10) \Rightarrow 650 = 8 \cdot m_A + 400 - 4 \cdot m_A$$

$$\Rightarrow 650 - 400 = 4 \cdot m_A \Rightarrow 4 \cdot m_A = 250 \Rightarrow m_A = \frac{250}{4} = 6/25 \text{ g}, m_B = 10 - 6/25 = 3/75 \text{ g}$$

$$m_A - m_B = 6/25 - 3/75 = 2/5 \text{ g}$$

اگر در اثر واکنش ۳۸/۴ گرم نفتالن با مقدار کافی گاز هیدروژن، ترکیبی کاملاً سیرشده تولید شود؛ کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟
($C = 12, H = 1: g \cdot mol^{-1}$)

- (الف) اختلاف جرم فراورده به دست آمده با مقدار عددی جرم نفتالن واکنش داده، برابر ۳/۶ گرم است.
(ب) شمار الکترون‌های پیوندی در ترکیب تولیدشده با مقدار عددی جرم مولی گاز سوخت فندک برابر است.
(پ) تعداد پیوندهای $C-C$ در ساختار فراورده، ۳ برابر تعداد پیوندهای اشتراکی در ساده‌ترین عضو خانواده آلکان‌ها است.
(ت) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن در ساختار فراورده، یک واحد بیشتر از این نسبت در نفتالن است.

(۲) الف - ب

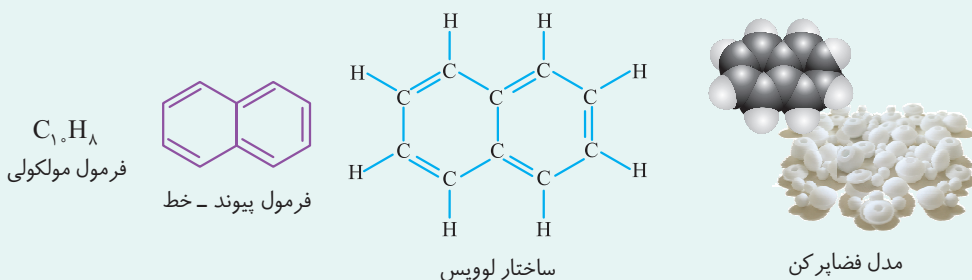
(۱) الف - پ

(۴) ب - پ

(۳) پ - ت

درس‌Box

نفتالن ($C_{10}H_8$) یکی از هیدروکربن‌های آروماتیک است که در آن دو حلقه بنزنی به هم جوش خورده‌اند! این ترکیب که جامدی سفیدرنگ است، مدت‌ها به عنوان ضدبید برای نگهداری فرش و لباس کاربرد داشته است.



همان‌طور که دیدید در ساختار نفتالن، ۲ حلقه، ۵ پیوند دوگانه و در مجموع ۲۴ پیوند اشتراکی وجود دارد. در ضمن هر مول نفتالن می‌تواند با ۵ مول گاز هیدروژن واکنش داده و به یک ترکیب سیرشده تبدیل شود:

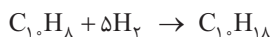


عبارت‌های «الف» و «پ» نادرست هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت‌ها:

(الف) هر مول نفتالن به دلیل وجود پنج پیوند دوگانه با ۵ مول گاز هیدروژن (H_2) واکنش می‌دهد و ترکیبی کاملاً سیرشده با فرمول شیمیایی $C_{10}H_{18}$ تولید می‌کند. در این واکنش اختلاف جرم مولکول به دست آمده با جرم نفتالن واکنش داده، همان جرم گاز هیدروژن افزوده شده می‌باشد:



$$38/4 \text{ g } C_{10}H_8 \times \frac{1 \text{ mol } C_{10}H_8}{128 \text{ g } C_{10}H_8} \times \frac{5 \text{ mol } H_2}{1 \text{ mol } C_{10}H_8} \times \frac{2 \text{ g } H_2}{1 \text{ mol } H_2} = \frac{38/4 \times 5 \times 2}{128} = 3 \text{ g } H_2$$

(ب)

هیدروکربن‌ها از دو عنصر هیدروژن و کربن تشکیل شده‌اند. از اون جایی که هر اتم کربن، ۴ الکترون و هر اتم هیدروژن، ۱ الکترون به اشتراک می‌گذارد و از طرفی هر پیوند اشتراکی شامل دو الکترون است، خواهیم داشت:

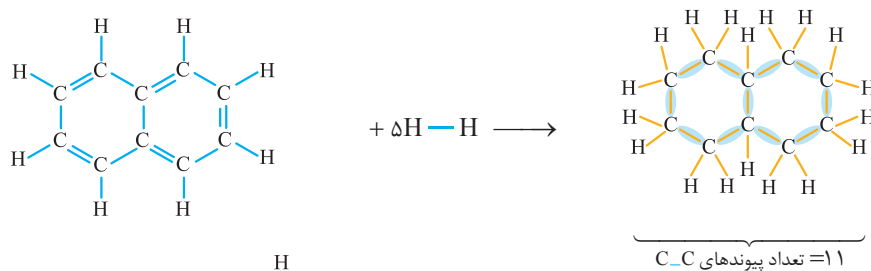
$$\text{تعداد اتم‌های هیدروژن (۱)} + (\text{تعداد اتم‌های کربن (۴)}) = \frac{\text{تعداد پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها}}{2}$$

با توجه به توضیحات داده شده، ترکیب تولیدشده از واکنش میان مولکول‌های نفتالن و گاز هیدروژن، هیدروکربنی با فرمول شیمیایی $C_{10}H_{18}$ است. تعداد پیوندهای اشتراکی در مولکول مورد نظر برابر ۲۹ است. $\frac{(4 \times 10) + (1 \times 18)}{2} = \frac{40 + 18}{2} = \frac{58}{2} = 29$

می‌باشد. از آن جایی که هر پیوند اشتراکی شامل دو الکترون پیوندی است، پس شمار الکترون‌های پیوندی در این ترکیب برابر $29 \times 2 = 58$ می‌باشد. از طرفی گاز سوخت فندک، بوتان با فرمول شیمیایی C_4H_{10} است که مقدار جرم مولی آن نیز برابر $58 = (4 \times 12) + (10 \times 1)$ می‌باشد.



پ) ساده‌ترین عضو خانواده آلکان‌ها، متان با فرمول شیمیایی CH_4 است که تعداد پیوندهای $\text{C}-\text{C}$ در فراورده واکنش گفته شده، $\frac{11}{4} = 2.75$ برابر تعداد پیوندهای اشتراکی در متان می‌باشد:



4 = تعداد پیوندهای اشتراکی $\Rightarrow$ متان، ساده‌ترین عضو خانواده آلکان‌ها

$\begin{array}{c} \text{H} \\ | \\ \text{H}-\text{C}-\text{H} \\ | \\ \text{H} \end{array}$

(ت)

$$\left. \begin{array}{l} \text{C}_8\text{H}_{18} \Rightarrow \frac{\text{شمار اتم‌های هیدروژن}}{\text{شمار اتم‌های کربن}} = \frac{18}{8} = 2.25 \\ \text{C}_8\text{H}_{18} \Rightarrow \frac{\text{شمار اتم‌های هیدروژن}}{\text{شمار اتم‌های کربن}} = \frac{18}{8} = 2.25 \end{array} \right\} \Rightarrow 1/8 - 0/8 = 1$$

نفتالن: $\text{C}_{10}\text{H}_8 \Rightarrow \frac{\text{شمار اتم‌های هیدروژن}}{\text{شمار اتم‌های کربن}} = \frac{8}{10} = 0.8$

اگر آرایش الکترونی یونهای A^{2+} و M^{3+} به ترتیب به $3p^6$ و $3d^1$ ختم شود، تفاوت عدد اتمی دو عنصر A و M، برابر با عدد اتمی

..... است.

مشاوره این سؤال، شبیه‌ساز یکی از گزینه‌های کنکورهای اخیر بوده است.

۲۱ Sc

(۲) اولین فلز واسطه جدول دوره‌ای

۱۹ K

(۴) فلز قلیایی با نماد شیمیایی تک‌حرفی

۳۵ Br

(۱) اتم سازنده هالوژن مایع

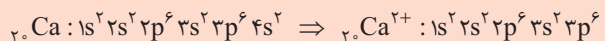
۱۱ Na

(۳) فلز قلیایی با رنگ شعله زرد

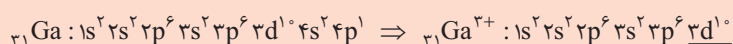


پاسخ خیلی تشریحی

عنصری که آرایش الکترونی بیرونی‌ترین زیرلایه یون A^{2+} آن به $3p^6$ ختم می‌شود، کلسیم (Ca) است:



عنصری که آرایش الکترونی بیرونی‌ترین زیرلایه یون M^{3+} آن به $3d^1$ ختم می‌شود، گالیم (Ga) است:



اختلاف عدد اتمی دو عنصر A و M برابر $31 - 20 = 11$ است. حال به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم تا عنصری با عدد اتمی ۱۱ را بیابیم:

گزینه (۱): هالوژن‌ها همان عناصر گروه ۱۷ جدول تناوبی هستند و تنها هالوژن مایع، برم (Br) است که اتم سازنده این عنصر (Br)، قبل از گاز نجیب کریپتون (Kr) می‌باشد؛ بنابراین عدد اتمی این عنصر، $36 - 1 = 35$ است. *

گزینه (۲): فلزات واسطه در گروه‌های ۳ تا ۱۰ و در دوره‌های چهارم تا هفتم جدول تناوبی قرار دارند. اولین فلز واسطه در گروه ۳ و دوره چهارم جدول جای دارد و سه عنصر بعد از گاز نجیب آرگون (Ar) می‌باشد؛ بنابراین عدد اتمی آن، $18 + 3 = 21$ است. *

گزینه (۳): فلزات قلیایی همان عناصر گروه ۱ جدول تناوبی هستند و فلز قلیایی با رنگ شعله زرد، سدیم (Na) است که این عنصر بعد از گاز نجیب نئون (Ne) می‌باشد؛ بنابراین عدد اتمی این عنصر، $10 + 1 = 11$ است. ✓

گزینه (۴): فلز قلیایی با نماد شیمیایی تک‌حرفی، پتاسیم (K) است که این عنصر بعد از گاز نجیب آرگون (Ar) می‌باشد؛ بنابراین عدد اتمی این عنصر، $18 + 1 = 19$ است. *

کدام مورد، نادرست است؟

(ریاضی خارج - تیر ۱۴۰۳)

(۱) عنصر در دوره سوم جدول تناوبی، جریان برق را از خود عبور می‌دهند.

(۲) در دوره چهارم جدول تناوبی، بیرونی‌ترین زیرلایه در آرایش الکترونی ۸ عنصر واسطه، $4s^2$ است.

(۳) تفاوت عدد اتمی پانزدهمین عنصر دسته d با عدد اتمی سیزدهمین عنصر دسته p در جدول تناوبی، برابر با عدد اتمی دومین فلز قلیایی با رنگ شعله زرد است.

(۴) اگر آرایش الکترونی یونهای A^{3+} و M^{2+} ، به ترتیب به $3p^6$ و $4s^2$ ختم شود، تفاوت عدد اتمی دو عنصر A و M، برابر عدد اتمی فلز قلیایی با رنگ شعله زرد است.

$$n + (2n + 2) = 20$$

هر مولکول از آلکان راست‌زنجیر A دارای ۲۰ اتم است و در ساختار آلکان راست‌زنجیر B، ۱۰ پیوند C—H وجود دارد. نقطه جوش آلکان‌های راست‌زنجیر A و B در فشار ۱ atm به ترتیب کدام اعداد بر حسب درجه سلسیوس می‌توانند باشند؟

یعنی ۱۰ اتم هیدروژن دارد

$$(۲) -۱,۶۹$$

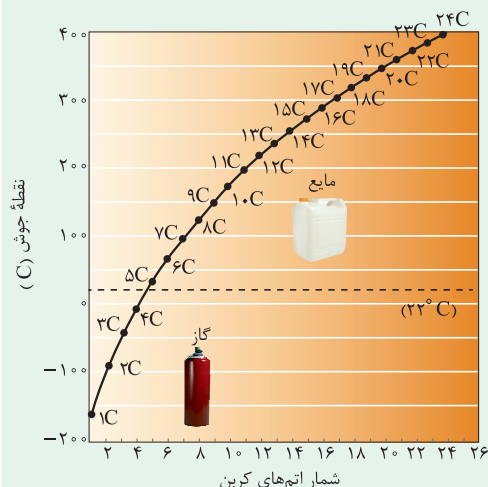
$$(۱) ۳۶,۶۹$$

$$(۴) -۵۰, -۱۲$$

$$(۳) ۵۶,۳۸$$

نکته

(۱) باتوجه به نمودار زیر، نقطه جوش چهار آلکان راست‌زنجیر نخست یعنی متان (CH_4)، اتان (C_2H_6)، پروپان (C_3H_8) و بوتان (C_4H_{10})، کم‌تر از صفر درجه سلسیوس است.



از آن‌جا که هر ترکیبی در دمای بالاتر از دمای جوش خود به حالت گاز است، پس این چهار هیدروکربن در دمای $۲۲^\circ C$ گاز تشریف دارند!

(۲) هیدروکربن‌ها از دو عنصر هیدروژن و کربن تشکیل شده‌اند. تعداد پیوندهای C—H در هیدروکربن‌ها با تعداد اتم‌های هیدروژن در آن‌ها برابر است. با توجه به این‌که فرمول عمومی آلکان‌ها، C_nH_{2n+2} می‌باشد، پس تعداد پیوندهای C—H در آلکان‌ها، $2n+2$ است.

فرمول عمومی آلکان‌ها، C_nH_{2n+2} است؛ بنابراین آلکان راست‌زنجیری که هر مولکول آن دارای ۲۰ اتم می‌باشد، هگزان با فرمول شیمیایی C_6H_{14} است:

$$C_nH_{2n+2} \text{ در آلکان راست‌زنجیر } n + 2n + 2 = 20 \Rightarrow 3n = 18 \Rightarrow n = \frac{18}{3} = 6$$

C_6H_{14} : فرمول شیمیایی آلکان A

با توجه به این‌که تعداد پیوندهای C—H در ساختار آلکان‌های راست‌زنجیر، $2n+2$ است، پس آلکان راست‌زنجیری که هر مولکول آن دارای ۱۰ پیوند C—H می‌باشد، بوتان با فرمول شیمیایی C_4H_{10} است:

$$C_nH_{2n+2} \text{ در آلکان راست‌زنجیر } 2n+2 = 10 \Rightarrow 2n = 8 \Rightarrow n = \frac{8}{2} = 4$$

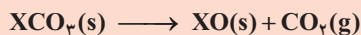
C_4H_{10} : فرمول شیمیایی آلکان B

آلکان راست‌زنجیر A در دمای اتاق مایع است؛ زیرا تعداد اتم‌های کربن در آن بالاتر از ۴ می‌باشد؛ بنابراین نقطه جوش آن در فشار ۱ atm بالاتر از $۲۲^\circ C$ درجه سلسیوس است؛ پس گزینه (۴) غلط می‌باشد.

آلکان راست‌زنجیر B گاز است؛ زیرا تعداد اتم‌های کربن در آن برابر ۴ می‌باشد؛ بنابراین نقطه جوش آن در فشار ۱ atm کم‌تر از $۲۲^\circ C$ درجه سلسیوس است؛ پس گزینه‌های (۱) و (۳) نیز غلط می‌باشند و تنها گزینه (۲) درست است.

پاسخ خیلی تشریحی

۷۲ ۲۰ گرم از کربنات فلز X با خلوص ۸۴ درصد، مطابق معادله زیر تجزیه شده و ۸ گرم اکسید فلز تولید می‌شود. جرم مولی فلز، چند برابر جرم مولی گاز اکسیژن است؟ ($O = ۱۶, C = ۱۲ : g.mol^{-1}$)



۱/۵ (۴)

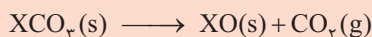
۱/۶ (۳)

۰/۷۵ (۲)

۰/۸ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا باید با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش انجام‌شده و محاسبات استوکیومتری، جرم مولی فلز X را به دست آوریم:



$$XCO_3 \text{ جرم مولی: } M + ۱۲ + ۳(۱۶) = M + ۱۲ + ۴۸ = (M + ۶۰) g.mol^{-1}$$

$$XO \text{ جرم مولی: } (M + ۱۶) g.mol^{-1}$$

$$۲۰ g XCO_3 \times \frac{۸۴ g XCO_3 \text{ خالص}}{۱۰۰ g XCO_3 \text{ ناخالص}} \times \frac{۱ mol XCO_3}{(M + ۶۰) g XCO_3 \text{ خالص}} \times \frac{۱ mol XO}{۱ mol XCO_3} \times \frac{(M + ۱۶) g XO}{۱ mol XO} = ۸ g XO$$

$$\Rightarrow \frac{۲۰ \times ۸۴ \times (M + ۱۶)}{۱۰۰ \times (M + ۶۰)} = ۸ \Rightarrow ۴۰M + ۲۴۰۰ = ۸۴M + ۱۳۴۴ \Rightarrow ۴۴M = ۱۰۵۶$$

$$\Rightarrow M = \frac{۱۰۵۶}{۴۴} = ۲۴ g.mol^{-1}$$

استفاده از کسر تناسب:

به‌چهره دیگر

$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{۱۰۰} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{۲۰ \times \frac{۸۴}{۱۰۰}}{۱ \times (M + ۶۰)} = \frac{۸}{۱ \times (M + ۱۶)} \Rightarrow$$

$$۲۰ \times \frac{۸۴}{۱۰۰} \times (M + ۱۶) = ۸ \times (M + ۶۰) \Rightarrow ۸۴M + ۱۳۴۴ = ۴۰M + ۲۴۰۰$$

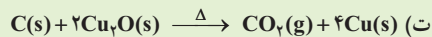
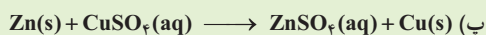
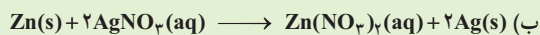
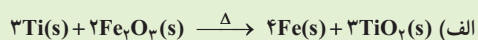
$$\Rightarrow ۴۴M = ۱۰۵۶ \Rightarrow M = \frac{۱۰۵۶}{۴۴} = ۲۴ g.mol^{-1}$$

در نهایت نسبت جرم مولی فلز مورد نظر به جرم مولی گاز اکسیژن (O_2) را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم مولی فلز X}}{\text{جرم مولی گاز } O_2} = \frac{۲۴}{۲ \times ۱۶} = ۰/۷۵$$

گول‌نخوری ✗ اگر نسبت جرم مولی فلز به اتم اکسیژن (O) را حساب کنی ($\frac{۲۴}{۱۶} = ۱/۵$)، به اشتباه به گزینه (۴) می‌رسی!

چه تعداد از واکنش‌های زیر به طور طبیعی انجام پذیر هستند؟



۳ (۴)

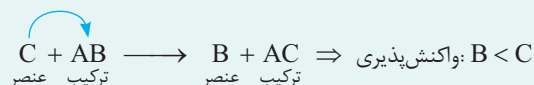
۲ (۳)

۱ (۲)

۴ (۱)

درس Box

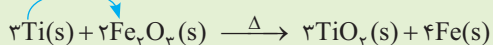
در هر واکنش شیمیایی که به طور طبیعی انجام می‌شود، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها کم‌تر است؛ پس اگر یک واکنش به ما بدهند که در دو طرفش به عنصر آزاد وجود داشته باشد و بگویند به طور طبیعی انجام می‌شود؛ ما خیلی سریع می‌توانیم واکنش‌پذیری دو عنصر آزاد در دو طرف معادله را با هم مقایسه کنیم.



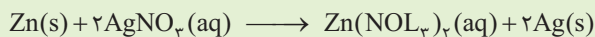
در معادله کلی بالا، واکنش‌پذیری C از B بیشتر بوده است، به همین دلیل میل بیشتری به تشکیل ترکیب داشته؛ از این رو واکنش رو با B عوض کرده!

پاسخ خیلی تشریحی ✓ همه واکنش‌های داده شده به طور طبیعی انجام پذیر هستند. کافیست در هر مورد، واکنش‌پذیری دو عنصر مربوطه را مقایسه کنیم:

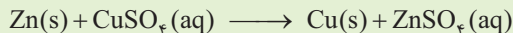
الف) واکنش‌پذیری فلز تیتانیم از فلز آهن بیشتر است، به همین دلیل می‌تواند جانشین فلز آهن در ترکیبش شود:



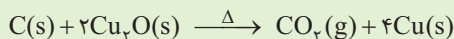
ب) واکنش‌پذیری فلز روی از فلز نقره بیشتر است، به همین دلیل می‌تواند جانشین فلز نقره در ترکیبش شود:



پ) واکنش‌پذیری فلز روی از فلز مس بیشتر است، به همین دلیل می‌تواند جانشین فلز مس در ترکیبش شود:



ت) واکنش‌پذیری کربن از فلز مس بیشتر است، به همین دلیل می‌تواند جانشین فلز مس در ترکیبش شود:



کدام موارد از مطالب زیر، درباره ششمین عنصر دسته d جدول تناوبی درست است؟

(الف) استخراج آن از سنگ معدن، دشوارتر از استخراج فلز مس از سنگ معدن است.

(ب) یون دو بار مثبت آن، یکی از سازنده‌های زنگ آهن است.

(پ) می‌توان درصد قابل توجهی از سنگ معدن آن را در فرایند استخراج به فلز تبدیل کرد.

(ت) مصرف سالانه آن در جهان از مصرف سالانه فلز طلا در جهان بیشتر است.

(۲) الف و پ

(۱) ب و پ

(۴) الف و ت

(۳) ب و ت



پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های «الف» و «ت» درباره ششمین عنصر دسته d جدول تناوبی درست هستند.

عناصر دسته d جدول تناوبی در گروه‌های ۳ تا ۱۰ و دوره‌های چهارم تا هفتم جدول قرار دارند؛ پس می‌توان فهمید که ششمین عنصر

دسته d جدول تناوبی، در گروه ۸ دوره چهارم جدول جای دارد؛ از آنجایی که این فلز، ۸ عنصر بعد از گاز نجیب آرگون (Ar_{18})

است؛ عدد اتمی آن برابر $18 + 8 = 26$ می‌باشد:



بررسی عبارت‌ها:

(الف) هر چه واکنش‌پذیری یک فلز بیشتر باشد، تمایل آن برای تبدیل شدن به ترکیب بیشتر است. به عبارت دیگر ترکیب‌هایش

پایدارتر از خودش هستند؛ بنابراین استخراج آن فلز دشوارتر خواهد بود. از آنجایی که واکنش‌پذیری فلز آهن، بیشتر از واکنش‌پذیری

فلز مس است؛ پس می‌توان گفت که استخراج فلز آهن از سنگ معدن، دشوارتر از استخراج فلز مس از سنگ معدن می‌باشد.

(ب) در زنگ آهن یون سه بار مثبت آهن (Fe^{3+}) وجود دارد.

(پ) در فرایند استخراج فلزها تنها درصد کمی از سنگ معدن به فلز تبدیل می‌شود.

(ت) آهن فلزی است که در سطح جهان بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد؛ بنابراین می‌توان گفت که مصرف

سالانه فلز آهن در جهان از مصرف سالانه فلز طلا بیشتر است.

۷۵ اگر فرمول مولکولی ترکیب $(C_7H_5)_2CH(CH_2)_x C(CH_3)_3$ با  یکسان باشد، نام این ترکیب کدام است؟

(۲) ۳-اتیل-۶،۶-دی‌متیل‌هپتان

(۱) ۴-اتیل-۲،۲-دی‌متیل‌هگزان

(۴) ۶-اتیل-۲،۲-دی‌متیل‌اوکتان

(۳) ۵-اتیل-۲،۲-دی‌متیل‌هپتان



پاسخ خیلی تشریحی ✓ ترکیبی با ساختار پیوند - خط  دارای ۱۱ اتم کربن است. از آن جایی که فرمول مولکولی ترکیب مورد

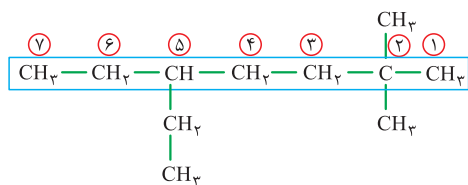
نظر با ساختار پیوند - خط داده شده یکسان می‌باشد، پس ترکیب مورد نظر نیز دارای ۱۱ اتم کربن می‌باشد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\underbrace{(C_7H_5)_2}_{4C} \underbrace{CH}_{1C} \underbrace{(CH_2)_x}_{xC} \underbrace{C(CH_3)_3}_{3C} \Rightarrow 4 + 1 + x + 1 + 3 = 9 + x = 11 \Rightarrow x = 11 - 9 = 2$$

در نتیجه می‌توان گفت که فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر، به صورت $(C_7H_5)_2CH(CH_2)_2C(CH_3)_3$ است. فقط CH_3

می‌تواند در دو سر زنجیر اصلی و یا به صورت شاخه فرعی متیل باشد. C_7H_5 را نیز به صورت CH_2-CH_3 می‌نویسیم؛

بنابراین ساختار گسترده و نام آلکان داده شده به صورت زیر است:



۵ - اتیل - ۲،۲ - دی‌متیل هپتان

با توجه به جدول زیر، کدام مطلب نادرست است ؟

نام سوخت	گرمای آزاد شده (kJ / g)	فراورده‌های سوختن	مقدار کربن دی‌اکسید به ازای هر کیلوژول انرژی تولیدشده (g)
بنزین	A	$\text{CO}_2, \text{CO}, \text{H}_2\text{O}$	X
زغال‌سنگ	B	$\text{Z}, \text{CO}_2, \text{NO}_2, \text{CO}, \text{H}_2\text{O}$	Y

(۱) تنوع عنصرهای سازنده بنزین نسبت به زغال‌سنگ، کم‌تر است.

(۲) مقدار A، بیشتر از مقدار B و مقدار X، کم‌تر از مقدار Y است.

(۳) یکی از راه‌های بهبود کارایی زغال‌سنگ، انجام واکنش $\text{Z(g)} + \text{CaO(s)} \rightarrow$ است.

(۴) از انحلال فراورده نیتروژن‌دار حاصل از سوختن زغال‌سنگ در آب، محیطی بازی ایجاد می‌شود.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

فراورده نیتروژن‌دار حاصل از سوختن زغال‌سنگ، گاز NO_2 است. از آن‌جا که از انحلال اکسیدهای نافلز در آب، ترکیب اسیدی

تشکیل می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که از انحلال گاز NO_2 در آب، محیطی اسیدی (نه بازی!) ایجاد می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): با توجه به فراورده‌های حاصل از سوختن زغال‌سنگ و بنزین در جدول داده‌شده، زغال‌سنگ از اتم‌های S, N, O, H, C

و بنزین از اتم‌های C و H تشکیل شده است؛ بنابراین تنوع عنصرهای سازنده در بنزین نسبت به زغال‌سنگ، کم‌تر می‌باشد.

گزینه (۲): گرمای آزاد شده در بنزین (48 kJ/g) بیشتر از گرمای آزاد شده در زغال‌سنگ (30 kJ/g) است؛ بنابراین مقدار A از

مقدار B بیشتر می‌باشد. از طرفی مقدار کربن دی‌اکسید به ازای هر کیلوژول انرژی تولیدشده در بنزین (65 g/°)، کم‌تر از مقدار

کربن دی‌اکسید به ازای هر کیلوژول انرژی تولیدشده در زغال‌سنگ (104 g/°) است؛ بنابراین مقدار X از مقدار Y کم‌تر می‌باشد.

گزینه (۳): همان گاز SO_2 است. یکی از راه‌های بهبود کارایی زغال‌سنگ به منظور حذف گاز SO_2 ، انجام واکنش



یک قطعه فلز مس به جرم ۵۰ گرم و دمای 60°C در ۲۵ گرم آب با دمای 5°C فرو برده می‌شود. کدام یک از مطالب زیر، درست است؟
(از تبادل گرمایی با محیط صرف نظر شود و ظرفیت گرمایی ویژه آب، اتانول و مس به ترتیب برابر $4/2$ ، $4/4$ و $0/4$ ژول بر گرم بر درجه سلسیوس است.)

(۱) طی این فرایند، تفاوت میانگین تندی حرکت ذرات دو ماده افزایش می‌یابد.

(۲) مقدار تغییر انرژی گرمایی در قطعه فلز مس، بیشتر از مقدار تغییر انرژی گرمایی در آب است.

(۳) در این تعادل گرمایی، تغییرات دمایی قطعه فلز مس، $5/25$ برابر تغییرات دمای آب است.

(۴) اگر به جای آب، اتانول با جرم و دمای یکسان به کار رود، دمای پایانی قطعه فلز مس پایین‌تر خواهد بود.



مسئله‌هایی از جنس هم‌دمایی!

دانش‌Box

در به سری از مسائل گرمایی که تو درس فیزیک هم فیلی باهاش سرکلر دارین! دو ماده با دمای متفاوت در تماس با هم قرار می‌گیرند تا هم‌دما شوند و این وسط به پی‌ری میوه! مثل دمای نهایی، گرمای ویژه یکی از مواد یا... وقتی دو ماده با دمای متفاوت را در تماس با هم قرار می‌دهیم، ماده با دمای بالاتر گرما از دست می‌دهد و ماده با دمای پایین‌تر، همین مقدار گرما را جذب می‌کند تا جایی که به یک دما برسند.

برای حل این مسائل با صرف نظر از اتلاف گرما، کافی است مقدار گرمایی که از یکی از مواد (مثلاً A) از دست می‌دهد را با مقدار گرمایی که ماده دیگر (مثلاً B) جذب می‌کند، برابر قرار دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} |Q_A| = |Q_B| \\ Q_A = m_A c_A \Delta\theta_A \quad \text{اگر } A \text{ گرما از دست بدهد} \\ Q_B = m_B c_B \Delta\theta_B \quad \text{اگر } B \text{ گرما بگیرد} \end{array} \right\} \Rightarrow |m_A c_A \Delta\theta_A| = |m_B c_B \Delta\theta_B|$$

اگر دمای اولیه A و B را به ترتیب $\theta_1(A)$ و $\theta_1(B)$ و دمای نهایی هر دو را θ_r در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$|m_A c_A (\theta_r - \theta_1(A))| = |m_B c_B (\theta_r - \theta_1(B))| \xrightarrow{\text{با توجه به ویژگی تابع قدر مطلق}} m_A c_A (\theta_1(A) - \theta_r) = m_B c_B (\theta_r - \theta_1(B))$$

قطعه فلز مس مقداری گرما از دست می‌دهد تا دمای آن از 60°C به دمای تعادل برسد. آب نیز همین گرما را جذب می‌کند تا دمای آن از 5°C به دمای تعادل برسد. به این ترتیب قدر مطلق گرمای مبادله‌شده توسط این دو جسم با هم برابر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |Q_{\text{فلز مس}}| &= |Q_{\text{آب}}| \\ |m_{\text{فلز مس}} \Delta\theta_{\text{فلز مس}}| &= |m_{\text{آب}} \Delta\theta_{\text{آب}}| \\ \Rightarrow \left| 50 \times 0/4 \times \Delta\theta_{\text{فلز مس}} \right| &= \left| 25 \times 4/2 \times \Delta\theta_{\text{آب}} \right| \Rightarrow \frac{\Delta\theta_{\text{فلز مس}}}{\Delta\theta_{\text{آب}}} = \frac{25 \times 4/2}{50 \times 0/4} = \frac{21}{4} = 5/25 \end{aligned}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): طی تعادل گرمایی انجام‌شده، دمای قطعه فلز مس کاهش و دمای آب، افزایش می‌یابد؛ بنابراین تفاوت دما یا همان میانگین تندی حرکت ذرات این دو ماده، کاهش (نه افزایش!) می‌یابد.

گزینه (۲): همان‌طور که گفته شد، با توجه به این‌که فرایند تعادل گرمایی تنها بین قطعه فلز مس و آب انجام می‌شود؛ بنابراین تغییر انرژی گرمایی در این دو ماده با هم قرینه است ولی مقدار آن‌ها با هم برابر می‌باشد.

گزینه (۴): ظرفیت گرمایی ویژه اتانول، کم‌تر از ظرفیت گرمایی ویژه آب است؛ بنابراین اگر به جای آب، اتانول با جرم و دمای یکسان به کار رود، اتانول گرمای کم‌تری نسبت به آب از قطعه فلز مس جذب می‌کند و دمای قطعه فلز مس را کم‌تر تغییر می‌دهد؛ پس دمای پایانی قطعه فلز مس بالاتر خواهد شد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مخلوطی به جرم ۱۶ گرم از ۲-متیل بوتان و ۲-پنتن را در اختیار داریم. اگر با افزودن ۱۶ گرم برم مایع به مخلوط مورد نظر و کامل انجام شدن واکنش (ها)، رنگ قرمز مخلوط به طور کامل از بین برود؛ درصد جرمی ۲-متیل بوتان در مخلوط اولیه کدام است؟ ($\text{Br} = 80, \text{C} = 12, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

۳۰ (۱)

۴۳ / ۷۵ (۲)

۵۶ / ۲۵ (۳)

۷۰ (۴)

مشاوره سوالات محاسباتی از واکنش هیدروکربن‌ها با گاز هیدروژن یا برم مایع در کنکورهای اخیر، خیلی پرتکرار بوده است.

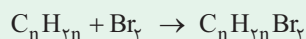


Hint

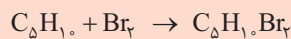
فقط ۲ - پنتن با برم واکنش می‌دهد. از روی جرم برم، ابتدا جرم ۲ - پنتن را به دست بیار و سپس به کمک جرم کل مخلوط، جرم ۲ - متیل بوتان و درصد جرمی آن را حساب کن!

نکته

آلکان‌ها ($\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$)، سیر شده‌اند و با برم واکنش نمی‌دهند، در حالی که آلکن‌ها (C_nH_{2n})، سیر نشده بوده و در واکنش با برم مایع، رنگ قرمز آن را از بین می‌برند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** با توجه به جرم برم، جرم ۲ - پنتن موجود در مخلوط را حساب می‌کنیم:



$$\text{جرم ۲-پنتن} = 16 \text{ g Br}_2 \times \frac{1 \text{ mol Br}_2}{160 \text{ g Br}_2} \times \frac{1 \text{ mol C}_5\text{H}_{10}}{1 \text{ mol Br}_2} \times \frac{70 \text{ g C}_5\text{H}_{10}}{1 \text{ mol C}_5\text{H}_{10}} = 7 \text{ g C}_5\text{H}_{10}$$

گام دوم: جرم ۲ - متیل بوتان در مخلوط اولیه و درصد جرمی آن را حساب می‌کنیم:

$$9 \text{ g} = 16 - 7 = \{\text{جرم ۲-پنتن}\} - \{\text{جرم کل مخلوط}\} = \text{جرم ۲-متیل بوتان}$$

$$\%56/25 = \frac{225}{4} = \frac{9}{16} \times \frac{25}{100} = \frac{9}{16} \times 100 = \frac{\text{جرم ۲-متیل بوتان}}{\text{جرم مخلوط}} \times 100$$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر دربارهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی به چه صورت است؟

- حدود ۴۵ درصد از عنصرهای آن، جز عنصرهای اصلی محسوب می‌شوند.
- آرایش الکترونی اتم ۴ عنصر آن به زیرلایهٔ نیمه‌پر ختم می‌شود.
- ۳ عنصر اول آن، فقط یک کاتیون پایدار تشکیل می‌دهند.
- در آرایش الکترونی ۸ عنصر آن، زیرلایهٔ $3d$ به طور کامل پر است.

مشاوره شما برای کنکور تون، باید همهٔ عنصرهای دورهٔ چهارم شامل نماد شیمیایی، حالت فیزیکی، عدد اتمی و آرایش الکترونی آن‌ها را به خوبی بشناسید

(۲) درست - نادرست - درست - درست

(۱) درست - درست - درست - درست

(۴) نادرست - نادرست - نادرست - نادرست

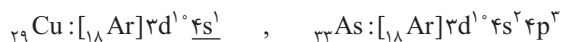
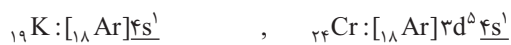
(۳) نادرست - درست - نادرست - نادرست

پاسخ خیلی تشریحی ✓ همهٔ عبارت‌های داده‌شده دربارهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی درست هستند.

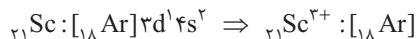
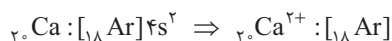
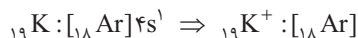
بررسی عبارت‌ها:

• عنصرهای دستهٔ s و p جدول دوره‌ای، عنصرهای اصلی هستند. در دورهٔ چهارم جدول تناوبی، عناصر گروه‌های ۱ و ۲ جزء عناصر دستهٔ s ، عناصر گروه‌های ۳ تا ۱۲ جزء عناصر دستهٔ d و عناصر گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ جز عناصر دستهٔ p هستند؛ بنابراین از میان ۱۸ عنصر موجود در دورهٔ چهارم جدول تناوبی، ۸ عنصر آن‌ها اصلی است که $45 \approx 100 \times \frac{8}{18}$ درصد از این عناصر را شامل می‌شود.

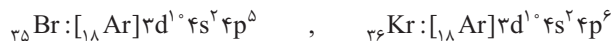
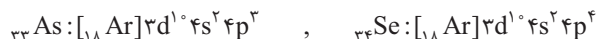
• عناصر دورهٔ چهارم جدول تناوبی در سه دستهٔ s ، p و d تقسیم می‌شوند که در عناصر دستهٔ s ، یک عنصر (پتاسیم K_{19}) به آرایش الکترونی $4s^1$ ، در عناصر دستهٔ d ، دو عنصر (کروم Cr_{24} و مس Cu_{29}) به آرایش الکترونی $4s^1$ ، در عناصر دستهٔ p ، یک عنصر (آرسنیک As_{33}) به آرایش الکترونی $4p^3$ می‌رسند؛ بنابراین می‌توان گفت که در دورهٔ چهارم جدول تناوبی، آرایش الکترونی اتم ۴ عنصر به زیرلایهٔ نیمه‌پر ختم می‌شوند.



• دو عنصر اول دورهٔ چهارم جدول تناوبی، فلزات گروه‌های اول و دوم جدول هستند که تنها یک نوع کاتیون پایدار تشکیل می‌دهند. از طرفی سومین عنصر این دوره، اولین فلز واسطه جدول تناوبی است که این عنصر نیز تنها یک کاتیون نوع پایدار سه بار مثبت تشکیل می‌دهد.



• در دورهٔ چهارم جدول تناوبی، دو عنصر از عناصر دستهٔ d که همان فلزات مس (Cu_{29}) و روی (Zn_{30}) هستند، دارای زیرلایهٔ $3d^{10}$ در آرایش الکترونی خود می‌باشند. از طرفی شش عنصر موجود در دستهٔ p این دوره، زیرلایهٔ $3d$ خود را به طور کامل پر کرده‌اند و در حال پر کردن زیرلایهٔ $4p$ خود هستند؛ بنابراین می‌توان گفت که در آرایش الکترونی ۸ عنصر دورهٔ چهارم جدول تناوبی، زیرلایهٔ $3d$ به طور کامل پر است.



از سوختن یکی از آلوتروپ‌های کربن، ۵۶ لیتر گاز در شرایط STP تولید و ۹۸۸/۵ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. با توجه به معادله واکنش‌های زیر، نوع آلوتروپ و جرم آن برحسب گرم، کدام است؟ ($C = 12 \text{ g.mol}^{-1}$)



(۲) گرافیت - ۱۵

(۱) الماس - ۱۵

(۴) گرافیت - ۳۰

(۳) الماس - ۳۰



پاسخ خیلی تشریحی ✓

جرم مولی گرافیت با جرم مولی الماس برابر است و از سوختن کامل هر مول از آن‌ها، یک مول از گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود؛ پس نوع آلوتروپ کربن در محاسبه جرم آن تأثیری ندارد و ما می‌توانیم به کمک حجم گاز کربن دی‌اکسید در شرایط STP و معادله واکنش‌های انجام‌شده، جرم کربن را به دست آوریم:

$$56 \text{ L CO}_2 \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{22/4 \text{ L CO}_2} \times \frac{1 \text{ mol C}}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{12 \text{ g C}}{1 \text{ mol C}} = \frac{56 \times 12}{22/4} = 30 \text{ g C}$$

برای پیدا کردن نوع آلوتروپ کربن، باید مقدار گرمای آزادشده در واکنش مورد نظر را محاسبه کنیم. با توجه به معادله واکنش‌ها، گرمای واکنش (Q) همان گرمای آزادشده به ازای تولید یک مول گاز کربن دی‌اکسید است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$1 \text{ mol CO}_2 \times \frac{24/4 \text{ L CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{988/5 \text{ kJ}}{56 \text{ L CO}_2} = \frac{24/4 \times 988/5}{56} = 395/4 \text{ kJ}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که با توجه به گرمای واکنش به‌دست‌آمده، آلوتروپ کربن مورد نظر، همان الماس است.