

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله دهم

پایه دوازدهم

تاریخ برگزاری: ۲۸/دی/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

دفترچه شماره یک

نوع ماده دروس	ریاضیات گسسته	هندسه	حسابان و ریاضیات پایه
	ریاضیات گسسته فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱) صفحه ۱ تا ۴۲	هندسه (۳) فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱ و ۲) صفحه ۹ تا ۴۶	حسابان (۲) فصل ۱ تا فصل ۳ صفحه ۱ تا ۶۹

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۷۵ دقیقه	۴۰	۱	۴۰	ریاضیات
۷۵ دقیقه	۴۰ سؤال			مجموع

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.

ویژه کنکوری های ۱۴۰۴

جمع بندی نیم سال اول



۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - [-x]}{1+x}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $+\infty$ (۲) صفر (۳) -1 (۴) $-\infty$

۲- چند جمله‌ای $f(x) = x^{13} - 16x^9 + x^3 + ax + b$ بر $x^2 - 3x + 2$ بخش پذیر است. باقی مانده تقسیم $f(x) + f(2x+1)$ بر $x+1$ کدام است؟

- (۱) 72 (۲) 144 (۳) 36 (۴) 108

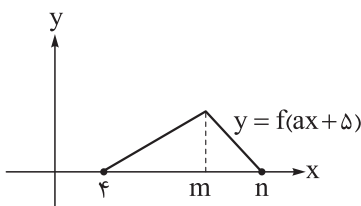
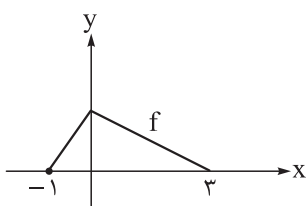
۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-a}{x+2}$ را دو واحد به راست انتقال می دهیم، سپس نسبت به محور y ها قرینه می کنیم، تا نمودار تابع g به دست می آید. نقطه برخورد نمودار تابع $g^{-1} \circ f$ با محور y ها چه عرضی دارد؟ ($a \neq -4$)

- (۱) -1 (۲) 2 (۳) -2 (۴) 1

۴- نمودار تابع $y = 2(x-a)^2 - a$ را 4 واحد به راست و 4 واحد به پایین انتقال می دهیم و سپس نسبت به مبدأ مختصات قرینه می کنیم و به تابع $y = -2(x-a)^2 - a$ می رسیم. مقدار a کدام است؟

- (۱) 2 (۲) -2 (۳) 6 (۴) -6

۵- نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f(ax + \Delta)$ به صورت زیر است. حاصل $a + m + n$ کدام است؟



(۱) $21/5$

(۲) $11/5$

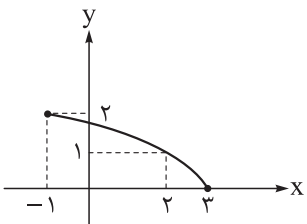
(۳) 24

(۴) 12

۶- تابع $f(x) = ax^2 - 4ax$ مفروض است. اگر بازه $[-2, +\infty)$ بزرگ ترین بازه ای باشد که تابع $g(x) = -2f(a - \frac{x}{3})$ روی آن بازه اکیداً نزولی است، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۷- نمودار تابع f به صورت زیر است. مجموعه جواب های نامعادله $(fof)(x) \geq 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

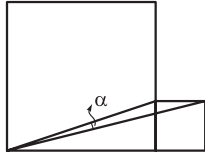


(۱) 5

(۲) 4

(۳) 3

(۴) 2



۸- در شکل مقابل دو مربع با ابعاد ۱ و ۳ رسم شده است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

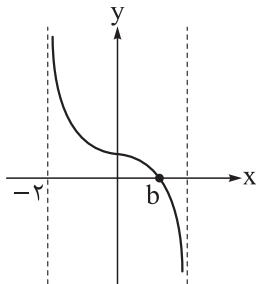
(۲) $\frac{1}{8}$

(۱) $\frac{1}{7}$

(۴) $\frac{1}{13}$

(۳) $\frac{1}{10}$

۹- نمودار تابع $y = 1 + \tan\left(\frac{a\pi}{2}x\right)$ به صورت زیر است. دوره تناوب تابع $y = a - b \cos\left(\frac{\pi}{a-b}x\right)$ کدام است؟



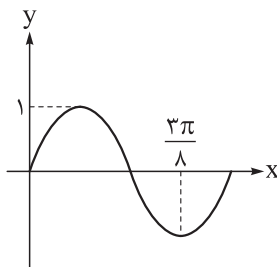
(۱) $\frac{4}{3}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۳

(۴) ۶

۱۰- بخشی از نمودار تابع $f(x) = c + a \cos^2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right)$ در یک دوره تناوب آن به صورت زیر است. حاصل $c + ab$ کدام است؟ ($b > 0$)



(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۲

(۴) ۳

۱۱- در معادله مثلثاتی $\frac{1 + \cos^2 x}{\sin x} = 3$ مجموع جواب‌ها در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

(۲) $\frac{3\pi}{4}$

(۱) $\frac{7\pi}{6}$

(۴) π

(۳) $\frac{3\pi}{2}$

۱۲- اگر α و β ریشه‌های معادله $\sin x + \cos x = 1/4$ در بازه $(0, \pi)$ باشند به طوری که $\alpha < \beta$ ، حاصل $\tan(\alpha - \beta)$ کدام است؟

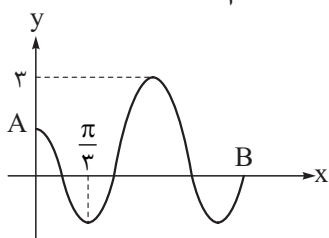
(۲) $-\frac{7}{25}$

(۱) $-\frac{7}{24}$

(۴) $\frac{7}{24}$

(۳) $-\frac{24}{7}$

۱۳- قسمتی از نمودار $f(x) = a + 2 \sin\left(\frac{b}{a}x + \frac{\pi}{6}\right)$ به صورت زیر است. شیب پاره خط AB کدام است؟



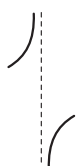
$$-\frac{4}{3\pi} \quad (2)$$

$$-\frac{6}{5\pi} \quad (1)$$

$$-\frac{12}{5\pi} \quad (4)$$

$$-\frac{7}{3\pi} \quad (3)$$

۱۴- نمودار تابع $y = \frac{a \cos \frac{\pi}{6}x - 2b}{2a - \sin \frac{\pi x}{12}}$ در مجاورت $x = 2$ به صورت زیر است. حداکثر مقدار $[16b]$ کدام است؟



([]، نماد جزء صحیح است.)

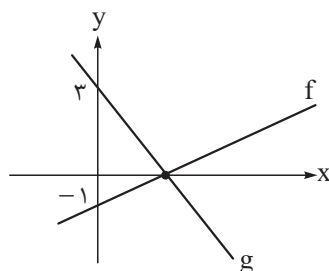
$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$-2 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۱۵- نمودار توابع f و g به صورت زیر است. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f + 2g^{-1})(x)}{(f^{-1} - g)(x)} = -\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $f^{-1}(0)$ کدام است؟



$$\sqrt{7} \quad (1)$$

$$\sqrt{15} \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$2\sqrt{3} \quad (4)$$

۱۶- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - f(2x))(x + f(x))$ کدام است؟

$$-4 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۱۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{\tan 2x}{1 + \cos x}$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند خط مجانب قائم دارد؟

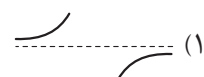
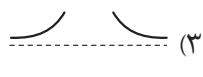
$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۱۸- اگر $x = 3$ تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x) = \frac{bx^2 + b}{2x^2 + ax + b}$ باشد، نمودار تابع f در مجاورت مجانب افقی آن کدام است؟



۱۹- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} 4 & ; i+j=4 \\ -1 & ; i+j \neq 4 \end{cases}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 - 18I$ چند برابر مجموع درایه‌های ماتریس A است؟

- (۱) $3/5$ (۲) 7 (۳) 4 (۴) $4/5$

۲۰- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و غیرصفر باشند، به طوری که $BA = B$ و $AB^2 = A$ ، آن گاه کدام گزینه ممکن است نادرست باشد؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- (۱) $B^{3n} = B^n$ (۲) $A^n = A$
(۳) $AB = B^2$ (۴) $(AB)^2 = A$

۲۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{100} کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) -2 (۴) 2

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، آن گاه از معادله ماتریسی $AX = A - 2A^{-1}$ مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس X کدام است؟

- (۱) $-5/0$ (۲) 7 (۳) $4/5$ (۴) -3

۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $BA = \beta I$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $A + \frac{\alpha}{\beta} B$ کدام است؟

- (۱) $4/5$ (۲) 10 (۳) $2/5$ (۴) 5

۲۴- اگر $|A|A + A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & -2 \\ 4 & |A| & 3 \\ 0 & |A| & 3 \end{bmatrix}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس وارون پذیر A برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) -2 (۴) -3

۲۵- شکل حاصل از تقاطع یک سطح مخروطی و صفحه‌ای که با محور آن موازی است، کدام است؟

- (۱) دایره (۲) بیضی
(۳) سهمی (۴) هذلولی

۲۶- مکان هندسی رأس سوم مثلث‌هایی از صفحه، که در ضلع AB مشترک هستند و تمام آن‌ها مساحت برابر دارند، کدام است؟

- (۱) دایره‌ای به مرکز وسط AB
 (۲) یک خط موازی با AB
 (۳) یک خط عمود بر راستای AB
 (۴) دو خط موازی با راستای AB

۲۷- دو نقطه $(-1, 2)$ و $(3, -6)$ دو سر قطری از دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ هستند، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

- (۱) -13
 (۲) -17
 (۳) 11
 (۴) 15

۲۸- طول وتری از دایره $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 16 = 0$ که مختصات وسط آن وتر، $(-2, 1)$ است، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{11}$
 (۲) 3
 (۳) $2\sqrt{11}$
 (۴) 6

۲۹- دو خط به معادله‌های $x - 2y + 1 = 0$ و $2x + y - 1 = 0$ بر دایره‌ای که مرکز آن روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد، مماس‌اند. حاصل ضرب مقادیر قابل قبول برای شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $2/$
 (۲) $4/$
 (۳) $6/$
 (۴) $8/$

۳۰- دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 35 = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 35 = R^2$ متقاطع‌اند. بیشترین مقدار صحیح R کدام است؟

- (۱) 19
 (۲) 20
 (۳) 21
 (۴) 22

۳۱- اگر a مضرب ۷ باشد ولی مضرب ۱۴ نباشد، باقی‌مانده تقسیم $a - a^3$ بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۳۲- کدام گزینه را نمی‌توان با مثال نقض رد کرد؟

- (۱) مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
(۲) مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
(۳) حاصل ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
(۴) حاصل ضرب یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳۳- برای $k \in \mathbb{Z}$ ، اگر $4k + 3$ ، 7 ، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت $x^2 - 3k + 49$ ، مقدار x کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۶ (۳) ۳۳ (۴) ۴۰

۳۴- در عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ می‌دانیم $a > c$. حاصل $\overline{abc} - \overline{cba}$ را به شکل عدد سه‌رقمی $\overline{xyz}$ بنویسید. اگر $A = \overline{xyz} + \overline{zyx}$

و $d \mid A$ ، آن‌گاه d چند مقدار مختلف صحیح دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۸

۳۵- در گرافی k - منتظم از مرتبه ۶، k حداکثر مقدار ممکن را دارد. اندازه این گراف کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۶

۳۶- در گراف G مرتبه گراف ۹ و اندازه آن ۱۰ است. در گراف $\overline{G}$ ، حداکثر چند رأس با درجه ۷ داریم؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۳۷- در معادله سیاله خطی $4x + 14y = 22$ ، حداقل مقدار طبیعی سه‌رقمی برای x کدام است؟

- (۱) ۱۰۳ (۲) ۱۰۲ (۳) ۱۰۱ (۴) ۱۰۰

۳۸- اگر ۱۴ فروردین در یک سال، روز سه‌شنبه باشد؛ دومین دوشنبه شهریور همان سال، چندم شهریور است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

۳۹- باقی‌مانده تقسیم $7! + 7^{1000}$ بر ۲۴ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۱۱ (۴) ۱۷

۴۰- عدد $2x^2 + 7x + 3$ ($x \in \mathbb{N}$) مضرب ۱۷ است و p مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی x است. برای گراف G

از مرتبه p که یکی از رئوس آن a است، حاصل $|N_G(a)| + |N_{\overline{G}}(a)|$ کدام است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۶ (۳) ۱۵ (۴) ۱۴

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله دهم

پایه دوازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۲۸/دی/۱۴۰۳

دستر چه شماره دو

بودجه بندی دروس

شیمی

فیزیک

شیمی (۳)
فصل ۱ و فصل ۲
صفحه ۱ تا ۶۶

فیزیک (۳)
فصل ۱ تا فصل ۳
(تا ابتدای موج و انواع آن)
صفحه ۱ تا ۶۹

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۸۰ دقیقه	۷۵	۴۱	۳۵	فیزیک
	۱۰۵	۷۶	۳۰	شیمی
۸۰ دقیقه	۶۵ سؤال			مجموع

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

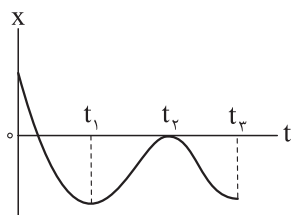
دفتر چه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرایه، فونت سؤالات، سایر کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفتر چه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.

ویژه کنکوری های ۱۴۰۴

جمع بندی نیم سال اول



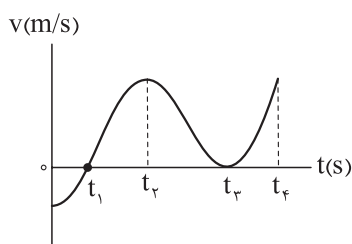
۴۱- نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. کدام موارد درباره حرکت این متحرک درست است؟



- (الف) در بازه زمانی صفر تا t_1 ، جهت حرکت متحرک دو مرتبه تغییر می کند.
 (ب) در بازه زمانی صفر تا t_3 ، جهت بردار مکان متحرک دو مرتبه تغییر می کند.
 (پ) در بازه زمانی صفر تا t_2 ، شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.
 (ت) در بازه زمانی صفر تا t_1 ، اندازه بردار مکان متحرک ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابد.

- (۱) الف و پ
 (۲) ب و ت
 (۳) الف و ت
 (۴) ب و پ

۴۲- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. چه تعداد از موارد زیر درباره حرکت این متحرک الزاماً درست است؟



- (الف) در لحظه t_3 ، جهت حرکت و جهت شتاب متحرک تغییر می کند.
 (ب) در بازه ای که شتاب متحرک در خلاف جهت محور x است، متحرک در جهت محور x حرکت می کند.
 (پ) در بازه زمانی صفر تا t_2 ، جهت بردار مکان متحرک یک مرتبه تغییر می کند.
 (ت) در بازه زمانی صفر تا t_1 ، متحرک به صورت کندشونده در خلاف جهت محور x حرکت می کند.

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

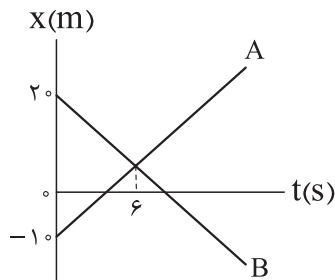
۴۳- شتاب متوسط متحرکی در ۴ ثانیه اول حرکت برابر $\vec{a} = (-2 \text{ m/s}^2)\vec{i}$ و در ۱۰ ثانیه اول حرکت برابر $\vec{a} = (1 \text{ m/s}^2)\vec{i}$ است. اگر سرعت متحرک در لحظه $t_1 = 4 \text{ s}$ برابر $\vec{v}_1 = (8 \text{ m/s})\vec{i}$ باشد، سرعت متحرک در لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ برابر چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) $10\vec{i}$
 (۲) $-10\vec{i}$
 (۳) $26\vec{i}$
 (۴) $-26\vec{i}$

۴۴- متحرک A با سرعت ثابت $(10 \text{ m/s})\vec{i}$ و متحرک B با سرعت ثابت $(12 \text{ m/s})\vec{i}$ در راستای محور x در حال حرکت هستند. اگر دو متحرک به ترتیب در لحظه های $t_1 = 0$ و $t_2 = 2 \text{ s}$ از مبدأ مکان عبور کنند، در چه لحظه ای برحسب ثانیه هر دو از یک مکان عبور می کنند؟

- (۱) ۸
 (۲) ۱۰
 (۳) ۱۲
 (۴) ۱۴

۴۵- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که با سرعت ثابت روی محور X حرکت می کنند، به شکل زیر است. در طی حرکت دو متحرک، چند ثانیه فاصله آن ها کم تر از ۵۰ m و بیشتر از ۱۰ m است؟



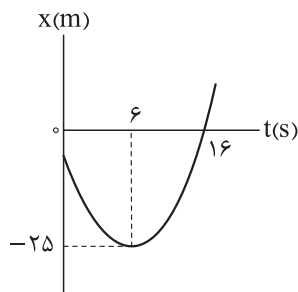
(۱) ۱۶

(۲) ۱۲

(۳) ۸

(۴) ۴

۴۶- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور X حرکت می کند، به صورت سهمی شکل زیر است. سرعت متوسط متحرک در ۸ s اول چند متر بر ثانیه است؟


 (۱) -1

 (۲) 1

 (۳) -21

 (۴) 21

۴۷- متحرکی با شتاب ثابت 2 m/s^2 از حال سکون شروع به حرکت می کند و پس از مدتی با شتابی ثابت به بزرگی 3 m/s^2 حرکتش کند می شود تا متوقف شود. اگر اندازه سرعت متوسط متحرک از لحظه شروع حرکت تا توقف آن برابر 15 m/s باشد، مسافت طی شده توسط متحرک در ۱۰ ثانیه دوم حرکت چند متر است؟

(۲) ۲۲۵

(۱) ۱۵۰

 (۴) $237/5$

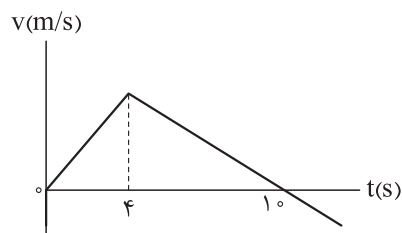
 (۳) $167/5$

۴۸- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در ۴ ثانیه سوم، چند برابر اندازه سرعت متوسط آن در بازه زمانی $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 6 \text{ s}$ است؟

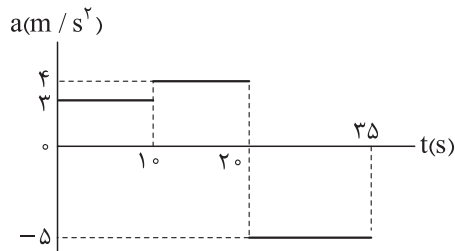
 (۱) $\frac{1}{9}$

 (۲) $\frac{2}{9}$

 (۳) $\frac{2}{19}$

 (۴) $\frac{4}{19}$


۴۹- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر متحرک در مبدأ زمان با تندی 15 m/s ، در خلاف جهت محور x از مبدأ مکان عبور کند، بیشترین فاصله متحرک از مبدأ مکان در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 35 \text{ s}$ برابر چند متر است؟



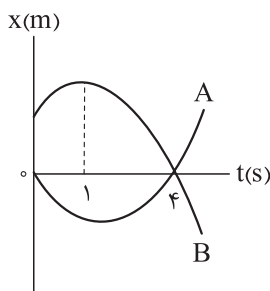
(۱) ۳۵۰

(۲) ۶۵۲/۵

(۳) ۳۸۷/۵

(۴) ۶۹۰

۵۰- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر در لحظه $t = 3 \text{ s}$ ، تندی دو متحرک به ترتیب 2 m/s و 4 m/s باشد، بیشترین فاصله دو متحرک از یکدیگر در ۴ ثانیه نخست چند متر است؟



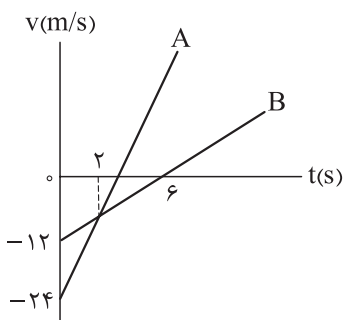
(۱) ۱۲/۵

(۲) ۱۲

(۳) ۱۱/۵

(۴) ۱۴

۵۱- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. در مبدأ زمان، دو متحرک به ترتیب در مکان‌های $x_1 = 0 \text{ m}$ و $x_2 = -10 \text{ m}$ قرار دارند. در بازه زمانی ای که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، فاصله بین آن‌ها چند متر و چگونه تغییر می‌کند؟



(۱) ۴۵، کاهش می‌یابد.

(۲) ۴۵، افزایش می‌یابد.

(۳) ۲۷، کاهش می‌یابد.

(۴) ۲۷، افزایش می‌یابد.

۵۲- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر تندی متوسط گلوله در $\frac{H}{4}$ ابتدای مسیر، برابر 10 m/s باشد، تندی گلوله در لحظه برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(۴) ۴۰

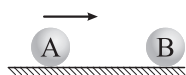
(۳) ۲۰

(۲) $20\sqrt{2}$ (۱) $10\sqrt{2}$

۵۳- در شرایط خلأ، از یک بلندی، ابتدا گلوله A و پس از مدتی گلوله B رها می‌شوند. اگر از لحظه رها شدن گلوله B تا ۲s پس از آن، فاصله بین دو گلوله ۵۰ m افزایش یابد، فاصله بین این دو گلوله در لحظه رها شدن گلوله B، چند متر بوده است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۷/۵ (۳) ۳۱/۲۵ (۴) ۳۲/۲۵

۵۴- در شکل زیر، گوی A به جرم 400 g که روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حال حرکت است، با تندی 12 m/s به گوی ساکن B برخورد کرده و با تندی 4 m/s در همان راستا باز می‌گردد. اگر جرم گوی B برابر 800 g باشد، تندی آن پس از برخورد، به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟

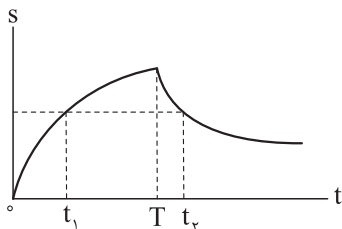


- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۱۶ (۴) ۲

۵۵- گلوله‌ای را در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر بزرگی شتاب گلوله هنگام بالارفتن ۴ برابر بزرگی شتاب آن، هنگام پایین آمدن باشد، اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر گلوله در طی این حرکت، با فرض ثابت بودن، چند برابر وزن گلوله است؟

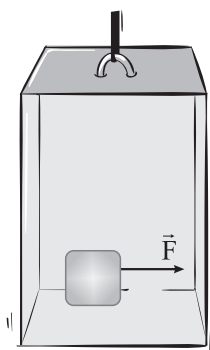
- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۵۶- نمودار تندی - زمان چتربازی که در مبدأ زمان از یک بلندی رها شده و در لحظه T چتر خود را باز کرده، به شکل زیر است. اگر اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر چتر باز در دو لحظه t_1 و t_2 ، به ترتیب برابر f_1 و f_2 باشد، کدام مقایسه درست است؟ (وزن چتر باز به همراه تجهیزات او برابر W است.)



- (۱) $f_1 < W < f_2$ (۲) $f_1 = f_2 < W$
(۳) $W < f_1 = f_2$ (۴) $f_2 < W < f_1$

۵۷- در شکل زیر، نیروی افقی $\vec{F}$ به جسمی که درون آسانسور قرار دارد، وارد می‌شود. آسانسور در حالت اول با شتاب رو به پایین به بزرگی 1 m/s^2 و در حالت دوم با شتاب رو به بالا به بزرگی 2 m/s^2 حرکت می‌کند. حداقل مقدار F برای به حرکت درآوردن جسم در کف آسانسور، در حالت اول چند برابر حالت دوم است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و $\mu_s \neq 0$)



- (۱) $\frac{11}{8}$ (۲) $\frac{11}{12}$ (۳) $\frac{9}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

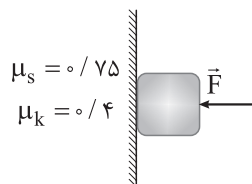
۵۸- یک انتهای فنر سبکی به طول 30 cm و ثابت 510 N/m به سقف آسانسوری بسته شده و از انتهای دیگر آن جسمی به جرم 1200 g آویزان است. در حالتی که شتاب آسانسور، رو به پایین و اندازه آن برابر $1/5 \text{ m/s}^2$ است، طول فنر به چند سانتی متر می‌رسد؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

- (۱) ۲۶ (۲) ۲۸ (۳) ۳۲ (۴) ۳۴

۵۹- دو جسم مکعب شکل A و B با تندی‌های اولیه $v_A = 7$ و $v_B = 27$ مماس بر یک سطح افقی پرتاب شده و به ترتیب پس از طی مسافت‌های ℓ_A و ℓ_B متوقف می‌شوند. اگر جرم جسم B، ۳ برابر جرم جسم A و ضریب اصطکاک جنبشی جسم A، $\frac{3}{4}$ برابر ضریب اصطکاک جنبشی جسم B باشد، $\frac{\ell_A}{\ell_B}$ کدام است؟

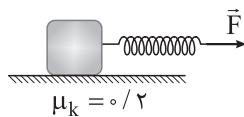
- (۱) ۶ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۶۰- در شکل زیر، وزن جسم 10 N و اندازه نیروی افقی $\vec{F}$ برابر 24 N است. اندازه نیرویی که جسم به دیوار قائم وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ (جسم در ابتدا ساکن است.)



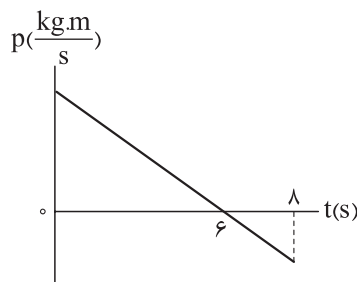
- (۱) ۲۶ (۲) ۳۰ (۳) ۲۴ (۴) ۳۴

۶۱- جسمی به جرم 5 kg از انتهای فنر سبک و قائمی آویزان است و در حالت تعادل، تغییر طول فنر نسبت به حالت عادی آن 12 cm است. اگر مطابق شکل زیر، این جسم را توسط همین فنر، روی یک سطح افقی، با شتاب 3 m/s^2 به حرکت در آوریم، طول فنر نسبت به حالت عادی چند سانتی متر افزایش می‌یابد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

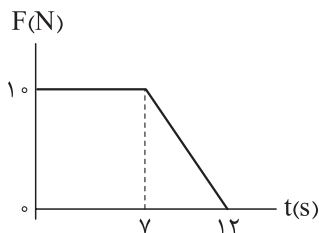


- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۶۲- نمودار تکانه - زمان جسمی به جرم 500 g ، به شکل زیر است. اگر در 8 ثانیه اول، انرژی جنبشی جسم 32 J تغییر کند، بزرگی نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در این مدت چند نیوتون است؟



- (۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) ۴

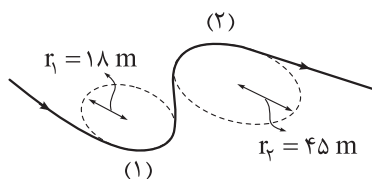


۶۳- نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی به جرم 6 kg که در راستای محور x حرکت می‌کند، بر حسب زمان، به شکل مقابل است. اگر تکانه جسم در لحظه $t = 10 \text{ s}$ برابر $\vec{i} (145 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}})$ باشد، سرعت اولیه جسم چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) $-9 \vec{i}$ (۲) $-8 \vec{i}$ (۳) $8 \vec{i}$ (۴) $9 \vec{i}$

۶۴- وزن ماهواره‌ای به جرم 75 kg در ارتفاع چند کیلومتری از سطح زمین برابر 480 N است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و شعاع کره زمین 6400 km است.)

- (۱) 800 (۲) 1600 (۳) 2400 (۴) 3200



۶۵- مسیر حرکت یک سورتمه در سطحی افقی به شکل مقابل و تندی سورتمه در تمام مسیر 30 m/s است. اگر اندازه شتاب مرکزگرای سورتمه در پیچ‌های (۱) و (۲) به ترتیب a_1 و a_2 باشد، $a_2 - a_1$ بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (r_1 و r_2 به ترتیب شعاع پیچ (۱) و پیچ (۲) هستند.)

- (۱) 27 (۲) -27 (۳) 30 (۴) -30

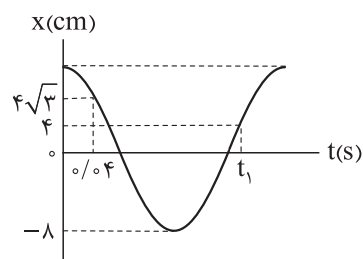
۶۶- دو متحرک A و B روی محیط دایره‌ای با تندی ثابت حرکت می‌کنند. اگر جرم جسم A ، 2 برابر جرم جسم B و اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر جسم A ، نصف اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر جسم B باشد، به ترتیب دوره تناوب جسم A چند برابر دوره تناوب جسم B و انرژی جنبشی جسم A چند برابر انرژی جنبشی جسم B است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ و 1 (۳) 2 و 1 (۴) 2 و $\frac{1}{4}$

۶۷- فاصله ماهواره A از سطح زمین به اندازه نصف شعاع زمین و فاصله ماهواره B از سطح زمین 5 برابر شعاع زمین است. دوره گردش ماهواره A چند برابر دوره گردش ماهواره B است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) 8 (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) 4

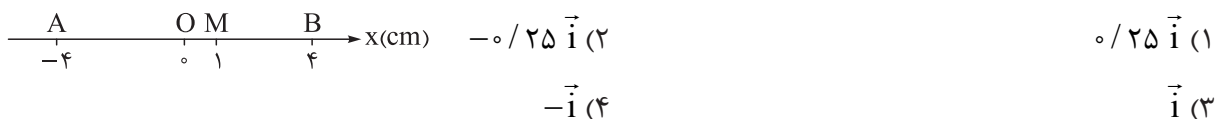
۶۸- اگر جرم نوسانگر یک سامانه جرم-فنر، 36 درصد کاهش یابد، بسامد نوسان‌های آن چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟ (۱) 20 ، کاهش می‌یابد. (۲) 20 ، افزایش می‌یابد. (۳) 25 ، کاهش می‌یابد. (۴) 25 ، افزایش می‌یابد.



۶۹- نمودار مکان-زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که در راستای محور x نوسان می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط این نوسانگر در بازه زمانی صفر تا t_1 چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

- (۱) 10 (۲) 50 (۳) 70 (۴) 85

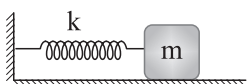
۷۰- در شکل زیر، نوسانگری به جرم 100 g روی پاره خط AB حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر نوسانگر در هر دقیقه 300 مرتبه طول پاره خط AB را طی کند، نیروی خالص وارد بر آن در نقطه M بر حسب نیوتون کدام است؟ ($\pi^2 = 10$)



۷۱- معادله مکان-زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = 0.1 \cos(10\pi t)$ است. در لحظه t_1 نوسانگر به صورت کندشونده از مکان $x_1 = 2\text{ cm}$ عبور می‌کند. چند ثانیه بعد از لحظه t_1 شتاب نوسانگر برای اولین بار برابر $(20\text{ m/s}^2)\vec{i}$ می‌شود؟ ($\pi^2 = 10$)

- (۱) 0.1 (۲) 0.2 (۳) 0.5 (۴) 0.4

۷۲- در شکل زیر، بیشینه و کمینه طول فنر در حین نوسان جسم متصل به آن روی سطح افقی بدون اصطکاک، به ترتیب 24 cm و 32 cm است. اگر در لحظه‌ای که طول فنر به 28 cm می‌رسد، انرژی جنبشی جسم 200 mJ باشد، ثابت فنر چند نیوتون بر متر است؟

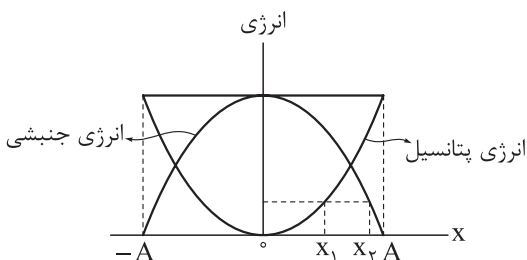


- (۱) 500 (۲) 250 (۳) 50 (۴) 25

۷۳- انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای 1 J و اندازه بیشینه نیروی خالص وارد بر آن 5 N است. مسافتی که نوسانگر در هر دوره تناوب طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟

- (۱) 4 (۲) 8 (۳) 16 (۴) 32

۷۴- نمودار انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده‌ای بر حسب مکان آن به شکل مقابل است. اگر تندی نوسانگر در مکان‌های x_1 و x_2 به ترتیب $1/2\text{ m/s}$ و 5 m/s باشد، تندی نوسانگر در مبدأ مکان چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) $1/3$ (۲) $1/5$ (۳) $1/7$ (۴) $1/9$

۷۵- اختلاف طول دو آونگ ساده A و B برابر 45 cm است. اگر در مدتی که آونگ A، ۵ نوسان انجام می‌دهد، تعداد نوسان‌های آونگ B برابر ۴ باشد، طول آونگ A برابر چند سانتی‌متر است؟

- (۱) 80 (۲) 180 (۳) 125 (۴) 225

۷۶- کدام موارد زیر، نادرست است؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16, Na = 23, K = 39: g.mol^{-1}$)

الف) نقطه ذوب صابون حاصل از واکنش روغن زیتون و سود سوزآور، پایین تر از $25^{\circ}C$ است.

ب) تفاوت جرم مولی روغن زیتون و چربی کوهان شتر، ۳ برابر تفاوت جرم مولی اوره و اتیلن گلیکول است.

پ) تفاوت شمار جفت الکترون های ناپیوندی در یک پاک کننده صابونی و یک پاک کننده غیر صابونی، برابر ۵ است.

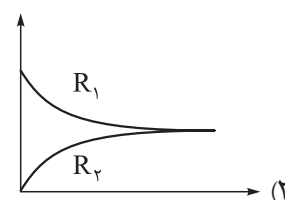
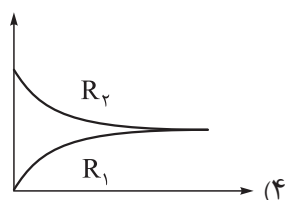
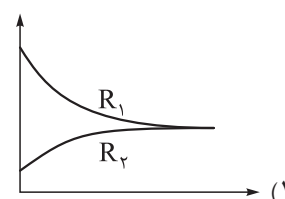
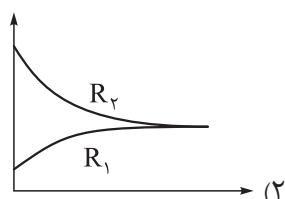
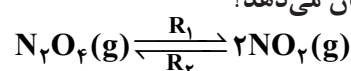
ت) حالت فیزیکی صابونی با زنجیر هیدروکربنی سیر شده و جرم مولی ۲۸۷ گرم بر مول، به یقین به صورت مایع است.

(۱) الف - پ (۲) الف - ت (۳) ب - ت (۴) ب - پ

۷۷- ۲ مول گاز N_2O_4 و ۱ مول گاز NO_2 را در ظرفی به حجم ۲ لیتر وارد می کنیم تا مطابق واکنش زیر به تعادل

برسند. اگر فشار گازهای موجود در ظرف واکنش پس از برقراری تعادل، نسبت به حالت اولیه، $1/5$ برابر شده باشد،

کدام نمودار تغییرات سرعت واکنش های رفت (R_1) و برگشت (R_2) را به درستی نشان می دهد؟



۷۸- چند مورد از مقایسه های زیر در ارتباط با محلول های A و B، درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)

HCl
(محلول A)

CH₃COOH
(محلول B)

• سرعت واکنش با فلز منیزیم: $A = B$

• حجم گاز هیدروژن تولید شده در واکنش با مقدار کافی فلز منیزیم: $A < B$

• مقدار سدیم هیدروکسید مورد نیاز برای خنثی کردن محلول: $A < B$

• جرم آنیون موجود در محلول: $A < B$

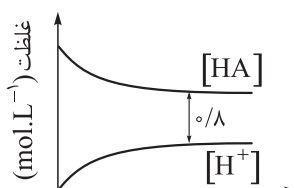
۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۷۹- با توجه به نمودار زیر که نشان دهنده تغییرات غلظت برخی گونه‌ها در واکنش یونش ۲ مول از اسید ضعیف HA در محلولی به حجم ۵۰۰ mL است، ثابت یونش این اسید کدام است؟



$$\frac{16}{15} \quad (1)$$

$$\frac{4}{15} \quad (2)$$

$$0.3 \quad (3)$$

$$0.6 \quad (4)$$

۸۰- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- در کربوکسیلیک اسیدها با افزایش تعداد اتم‌های کربن، قدرت اسیدی افزایش می‌یابد.
- سدیم هیدروکسید یک باز بسیار قوی است و به طور کامل در آب یونش می‌یابد.
- در محلول اسیدهای ضعیف، میان اندک یون‌های حاصل از یونش و مولکول‌های یونیده‌نشده، تعادل برقرار می‌شود.
- در محلول‌های آبی، هر چه قدر غلظت یون هیدرونیوم افزایش یابد، به همان اندازه از غلظت یون هیدروکسید کاسته می‌شود.

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۸۱- HX و HY دو اسید ضعیف هستند. اگر ۱۲ گرم از HX و ۸ گرم از HY جداگانه در ۳۰۰ میلی‌لیتر آب حل شوند، pH محلول HX، ۵/۰ واحد بیشتر از pH محلول HY خواهد شد. با توجه به آن نسبت $\frac{\alpha_{HY}}{\alpha_{HX}}$ کدام است؟
($HY = 50, HX = 150; g.mol^{-1}$)

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$1/5 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

۸۲- چند مورد از موارد زیر، دربارهٔ محلول‌های ۰/۲ مولار هیدروفلئوریک اسید و ۰/۱ مولار نیترو اسید، در دمای ثابت درست است؟

- دو محلول ممکن است pH یکسانی داشته باشند.
- دو محلول می‌توانند با مقدار یکسانی پتاسیم هیدروکسید به طور کامل واکنش دهند.
- با افزایش غلظت هر دو محلول، ثابت یونش هر دو اسید افزایش می‌یابد.
- با رقیق کردن هر دو محلول، درجهٔ یونش هر دو اسید کاهش می‌یابد.

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۸۳- چند مورد از عبارتهای زیر، همواره درست است؟

- در واکنش دو اسید با حجم و غلظت یکسان با فلز روی، میزان حجم گاز هیدروژن تولیدی برابر است.
- در واکنش دو اسید با حجم و pH یکسان با مقدار زیادی سدیم هیدروکسید، میزان آب تولیدشده برابر است.
- دو اسید با حجم و pH یکسان در واکنش با یک واکنش دهنده مشخص، سرعت یکسانی داشته و زمان واکنش آنها نیز برابر است.
- اگر pH دو اسید قوی یکسان باشد، غلظت مولی هر دو اسید برابر است.
- سرعت واکنش محلول اسید قوی با فلز آهن، بیشتر از سرعت واکنش محلول اسید ضعیف با همان فلز است.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۴- اگر مجموع pH محلول ۰/۲ مولار اسید HA و محلول ۰/۱ مولار باز BOH، برابر ۱۲/۴ باشد، نسبت درجه یونش اسید HA به درجه یونش باز BOH کدام است؟

(۱) ۰/۰۵ (۲) ۰/۱ (۳) ۲۰ (۴) ۱۰

۸۵- ۱/۳۶ گرم گاز NH_3 را وارد ۱۰۰ میلی لیتر محلول ۰/۱ مولار آن می کنیم. اگر حجم و دمای محلول تغییری نکند، pH محلول حاصل به تقریب ($K_b = 2/56 \times 10^{-5}$, $H = 1$, $N = 14$: g.mol^{-1})

- (۱) یک واحد افزایش می یابد.
- (۲) ۰/۵ واحد افزایش می یابد.
- (۳) یک واحد کاهش می یابد.
- (۴) ۰/۵ واحد کاهش می یابد.

۸۶- جرمهای برابری از سدیم اکسید ناخالص و دی نیتروژن پنتا اکسید ناخالص را در آب حل کرده و حجم محلول را با افزودن آب به ۵ لیتر می رسانیم. اگر pH محلول حاصل برابر ۷ باشد، نسبت درصد خلوص سدیم اکسید به درصد خلوص دی نیتروژن پنتا اکسید، به تقریب کدام است؟ (ناخالصیها باعث تغییر غلظت آب نمی شوند). ($N = 14$, $O = 16$, $Na = 23$: g.mol^{-1})

(۱) ۱/۱۴ (۲) ۳/۴ (۳) ۰/۵۷ (۴) ۱/۷

۸۷- ۲۰۰ میلی لیتر محلول باریوم هیدروکسید که غلظت مولی یون هیدروکسید در آن، ۰/۳ مولار است، با چند میلی لیتر محلول آهن (III) کلرید که مجموع غلظت مولی یونها در آن، ۰/۸ مولار است، مطابق معادله موازنه نشده زیر به طور کامل واکنش داده و در پایان، چند گرم رسوب آهن (III) هیدروکسید تشکیل می شود؟ ($H = 1$, $O = 16$, $Fe = 56$: g.mol^{-1})

$$\text{FeCl}_3(\text{aq}) + \text{Ba}(\text{OH})_2(\text{aq}) \rightarrow \text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s}) + \text{BaCl}_2(\text{aq})$$

(۱) ۱۰۰ - ۲/۱۴ (۲) ۵۰ - ۲/۱۴ (۳) ۱۰۰ - ۴/۲۸ (۴) ۵۰ - ۴/۲۸

۸۸- برای خنثی کردن ۱۰۰ میلی لیتر محلول ۰/۰۲ مولار هیدروفلوئوریک اسید با درجه یونش ۰/۲، چند گرم سدیم هیدروکسید با درصد خلوص ۵۰٪ نیاز است؟ ($H = 1$, $O = 16$, $Na = 23$: g.mol^{-1})

(۱) ۰/۳۲ (۲) ۰/۱۶ (۳) ۰/۰۱۶ (۴) ۰/۰۳۲

۸۹- کدام مورد، نادرست است؟

- (۱) باتری، مولدی است که در آن واکنش شیمیایی با سفر الکترون رخ می‌دهد تا بخشی از انرژی شیمیایی مواد به انرژی الکتریکی تبدیل شود.
- (۲) در واکنش‌های اکسایش - کاهش، ماده‌ای که با گرفتن الکترون سبب اکسایش گونه دیگر می‌شود را اکسنده می‌نامند.
- (۳) در گذشته برای عکاسی از سوختن $Mg(s)$ به عنوان منبع نور استفاده می‌شد که در این واکنش، منیزیم با نور خیره‌کننده‌ای به $MgO(s)$ تبدیل می‌شود.
- (۴) در واکنش تیغه آهن با محلول مس (II) سولفات، مخلوط واکنش گرم‌تر می‌شود، زیرا سامانه واکنش بخشی از انرژی را به شکل گرما از محیط می‌گیرد.

۹۰- کدام گزینه، عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«معادله نیم‌واکنش با معادله نیم‌واکنش یکسان است.»

- (۱) کاتدی در سلول برقکافت آب - کاتدی در فرایند خوردگی آهن در محیط خنثی
- (۲) آندی در سلول نور - الکتروشیمیایی سیلیسیم - آندی در سلول برقکافت آب
- (۳) کاهش نیم‌سلول SHE در کاتد سلول گالوانی - آندی در سلول سوختی هیدروژن
- (۴) کاتدی در سلول سوختی هیدروژن - کاتدی در فرایند خوردگی آهن در محیط اسیدی

۹۱- کدام موارد زیر، نادرست است؟

- الف) در تمام سلول‌های گالوانی با گذشت زمان، جرم تیغه آندی کاهش و جرم تیغه کاتدی افزایش می‌یابد.
- ب) emf واکنش‌های اکسایش - کاهش، مستقل از ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در آن‌ها است.
- پ) در همه باتری‌ها با انجام نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی، جریان الکتریکی در مدار بیرونی برقرار می‌شود.
- ت) با توجه به چگالی و E° کم فلز لیتیم، در ساخت همه باتری‌های دگمه‌ای از آن استفاده می‌شود.

- (۱) الف - پ (۲) الف - ت (۳) ب - پ (۴) ب - ت

۹۲- با توجه به پتانسیل‌های کاهش استاندارد زیر، کدام گونه اکسنده قوی‌تری است؟

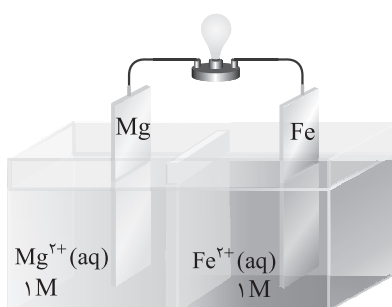
$$E^\circ (Cl_2 / 2Cl^-) = +1 / 36V \quad E^\circ (MnO_4^- / Mn^{2+}) = +1 / 51V$$

$$E^\circ (O_2 / 2H_2O) = +1 / 23V \quad E^\circ (Cr_2O_7^{2-} / 2Cr^{3+}) = +1 / 33V$$



۹۳- با توجه به شکل و E° نیم‌واکنش‌ها، چند مورد از موارد زیر، نادرست است؟

$$E^\circ(\text{Mg}^{2+}(\text{aq}) / \text{Mg}(\text{s})) = -2 / 37 \text{ V} , \quad E^\circ(\text{Fe}^{2+}(\text{aq}) / \text{Fe}(\text{s})) = -0 / 44 \text{ V}$$



- در این سلول، الکترون‌ها در مدار بیرونی، از الکتروود منیزیم به سمت الکتروود آهن جریان می‌یابند.
- یون‌های منیزیم از طریق دیواره متخلخل به سمت نیم‌سلول آهن حرکت می‌کنند.
- با جایگزین کردن آند این سلول با فلز روی، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی تغییر می‌کند.
- با جایگزین کردن کاتد این سلول با یک فلز کاهنده‌تر، emf سلول کاهش می‌یابد.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

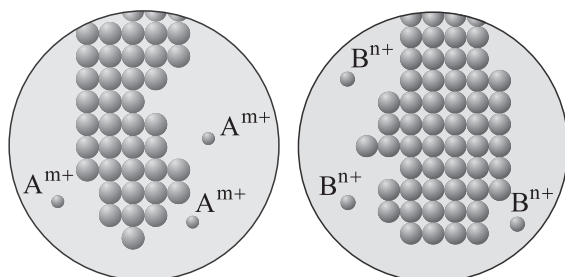
۹۴- اگر در سلول گالوانی استاندارد $\text{Mg} - \text{SHE}$ ، pH محلول کاتدی به $0 / 45$ برسد، کاهش جرم تیغه آندی برابر چند

گرم است؟ (حجم محلول‌های آندی و کاتدی برابر با ۱ لیتر است؛ $\text{Mg} = 24 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۱۶ / ۸ (۱) ۱۵ / ۶ (۲)

۸ / ۴ (۳) ۷ / ۸ (۴)

۹۵- با توجه به شکل‌های مقابل که نشان‌دهنده تیغه‌های فلزی یک سلول گالوانی در محلول‌های آندی و کاتدی است،



چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- اگر آلیاژی از فلزهای A و B در محلول هیدروکلریک اسید با $\text{pH} = 1$ به طور کامل حل شود، قدرت کاهندگی فلزهای A و B، بیشتر از Cu است.

- اگر تیغه‌های A و B به ترتیب مربوط به فلزهای روی و مس

باشند، مجموع شمار اتم‌های تیغه‌های فلزی با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند.

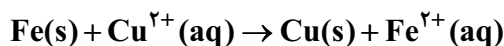
- با قراردادن تیغه‌ای از جنس فلز A درون محلولی از نمک فلز B، جرم تیغه افزایش می‌یابد.

- اگر با قراردادن تیغه‌ای از جنس فلز B درون محلول ۱ مولار آهن (II) سولفات، دمای محلول تغییری نکند،

مقایسه قدرت کاهندگی این سه فلز به صورت $B < \text{Fe} < A$ می‌باشد.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۶- ولت سنج سلول گالوانی Fe-Cu که واکنش زیر در آن انجام می‌شود، اختلاف پتانسیل میان دو نیم‌سلول را برابر ۰/۶۵ ولت نشان می‌دهد. اگر در این سلول گالوانی، ۴/۲ گرم از جرم تیغه آند کاسته شود، چند گرم بر جرم تیغه کاتد افزوده خواهد شد؟ (۷۵ درصد رسوب تولیدشده روی تیغه قرار می‌گیرد؛ $\text{Fe} = 56: \text{g.mol}^{-1}$, $\text{Cu} = 64$)



$$E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = +0.34 \text{ V}, E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0.44 \text{ V}$$

۴ (۴

۳ (۳

۲/۵ (۲

۲ (۱

۹۷- اطلاعات چند ردیف از جدول زیر، درباره مقایسه سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، کاملاً درست است؟

ردیف	مؤلفه	سلول گالوانی	سلول الکترولیتی
۱	علامت الکتروود آند	منفی	مثبت
۲	علامت الکتروود کاتد	مثبت	منفی
۳	علامت emf	مثبت	مثبت
۴	انجام شدن واکنش	غیر خودبه‌خودی	خودبه‌خودی
۵	جهت حرکت الکترون‌ها	از قطب منفی به مثبت	از قطب منفی به مثبت
۶	جهت حرکت یون‌ها	به سوی الکتروود با بار همنام	به سوی الکتروود با بار ناهمنام

۵ (۱

۴ (۲

۳ (۳

۲ (۴

۹۸- درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- قدرت اکسندگی هالوژن‌ها، بیشتر از قدرت اکسندگی کاتیون فلزهای قلیایی هم‌دوره با آن‌ها است.
- اگر ترکیب HXO_3 در واکنش‌ها تنها به عنوان عامل اکسندگی شرکت کند، عنصر X متعلق به گروه ۱۷ جدول دوره‌ای است.
- افزایش ولتاژ اعمال شده به سلول الکترولیتی بر قکافت آب می‌تواند باعث افزایش سرعت برقکافت شود.
- الکترولیت مورد استفاده در سلول برقکافت آب باید رسانایی الکتریکی داشته باشد.
- یکی از کاربردهای برقکافت آب، تولید گاز هیدروژن است که به عنوان سوخت در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن کاربرد دارد.

(۱) درست - نادرست - درست - درست - نادرست (۲) نادرست - درست - درست - نادرست - نادرست

(۳) نادرست - درست - نادرست - درست - درست (۴) درست - نادرست - درست - درست - درست

۹۹- مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها در معادله واکنش زیر پس از موازنه، کدام است و بر اثر مبادله ۱/۲ مول الکترون در این واکنش، چند مول سرب (IV) اکسید تولید می‌شود؟



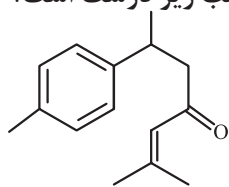
۰/۹، ۶ (۴

۰/۷۵، ۶ (۳

۰/۹، ۵ (۲

۰/۷۵، ۵ (۱

۱۰۰- با توجه به ساختار زیر که ترکیب آلی موجود در زردچوبه را نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

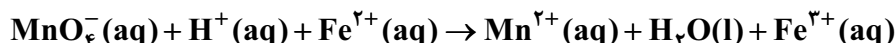


- عدد اکسایش همه اتم‌های کربنی که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند، برابر صفر است.
- ۴۰ درصد از اتم‌های کربن، دارای عدد اکسایش -۱ هستند.
- اتم‌های کربن دارای عدد اکسایش -۳، حداکثر با یک اتم کربن پیوند دارند.
- حداقل و حداکثر عدد اکسایش اتم‌های کربن شرکت کننده در پیوند دوگانه، به ترتیب برابر صفر و -۱ است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۱- در واکنش موازنه نشده زیر، گونه نقش کاهنده داشته و با مصرف ۱۴ / ۲۸ گرم MnO_4^- ، گرم Fe^{3+} تولید می‌شود.

($\text{O} = ۱۶, \text{Mn} = ۵۵, \text{Fe} = ۵۶ : \text{g.mol}^{-1}$)

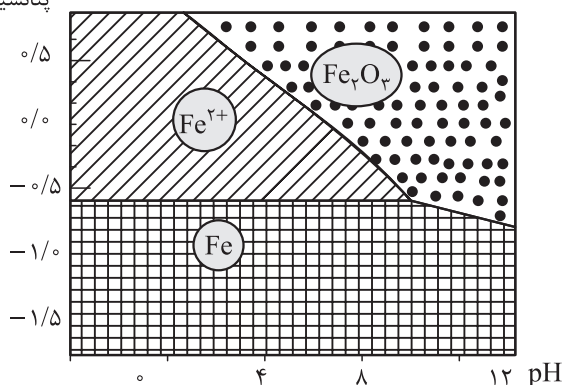


۱) $\text{Fe}^{2+}(\text{aq}) - ۲۶ / ۸۸$ ۲) $\text{Fe}^{2+}(\text{aq}) - ۳۳ / ۶$

۳) $\text{MnO}_4^-(\text{aq}) - ۲۶ / ۸۸$ ۴) $\text{MnO}_4^-(\text{aq}) - ۳۳ / ۶$

۱۰۲- نمودار پوربه (شکل زیر)، رابطه بین پتانسیل الکترودی (E°)، pH محلول و گونه‌های شیمیایی پایدار آهن را نشان می‌دهد. با استفاده از این نمودار می‌توان رفتار خوردگی آهن را در شرایط مختلف پیش‌بینی کرد. تفسیر نواحی مختلف این نمودار به صورت زیر است:

پتانسیل الکترودی



در این ناحیه، آهن تمایل به اکسید شدن و تشکیل یون‌های آهن دارد.

ناحیه‌ای که در آن آهن به صورت فلز پایدار باقی می‌ماند و خوردگی رخ نمی‌دهد.

در این ناحیه، اکسیدهای آهن پایدار هستند و ممکن است لایه‌های محافظتی روی سطح آهن تشکیل شوند.

با توجه به اطلاعات کتاب درسی و شکل مقابل، کدام موارد در رابطه با خوردگی آهن درست است؟

الف) یک لوله فولادی در محیطی با $\text{pH} = ۳$ و پتانسیل الکترودی ۰ / ۵ ولت، در معرض خوردگی شدید قرار دارد.

ب) با انتقال یک قطعه فولادی از محیطی با $\text{pH} = ۷$ به محیطی با $\text{pH} = ۲$ ، سرعت خوردگی کاهش می‌یابد.

پ) در محیط‌های بازی و پتانسیل‌های الکترودی بالا، تشکیل اکسید آهن، سرعت خوردگی سازه‌های آهنی را کاهش می‌دهد.

ت) بر اثر قرارگیری قطعه‌های فولادی در معرض رطوبت محیط در دمای ۲۵°C و فشار ۱ atm ، خوردگی قطعه‌ها انجام نمی‌پذیرد.

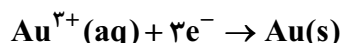
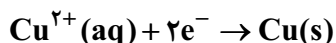
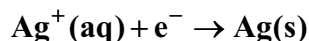
ث) برای حفاظت از یک لوله فولادی در محیطی اسیدی، می‌توان از اعمال یک جریان الکتریکی برای کاهش پتانسیل لوله یا گالوانیزه کردن قطعه استفاده کرد.

۱) الف - ب - پ ۲) الف - ت - ث ۳) ب - ت ۴) الف - پ - ث

۱۰۳- دو قاشق فلزی یکسان را در سلول‌های آبکاری (۱) و (۲) به ترتیب با فلزهای مس و نقره می‌پوشانیم. اگر شمار مول الکترون‌های مصرفی در سلول آبکاری (۱)، ۴ برابر سلول دیگر باشد، نسبت تفاوت جرم دو قاشق پس از انجام آبکاری برحسب گرم به شمار مول الکترون‌های مصرفی در سلول آبکاری (۲) برابر کدام است؟ ($\text{Cu} = 64, \text{Ag} = 108 : \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۲

۱۰۴- سه گوی فولادی مشابه را با فلزهای نقره، مس و طلا آبکاری می‌کنیم. پاسخ درست دو پرسش زیر، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟ ($\text{Cu} = 64, \text{Ag} = 108, \text{Au} = 197 : \text{g.mol}^{-1}$)



الف) اگر شمار الکترون‌های مبادله‌شده در فرایندهای آبکاری یکسان باشد، در آبکاری با کدام فلز، جرم گوی به میزان بیشتری افزایش می‌یابد؟

ب) اگر جرم گوی‌ها به یک‌اندازه افزایش یافته باشد، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آبکاری با کدام فلز بیشتر است؟

(۱) $\text{Cu} - \text{Ag}$ (۲) $\text{Ag} - \text{Au}$ (۳) $\text{Au} - \text{Ag}$ (۴) $\text{Cu} - \text{Au}$

۱۰۵- در سلول گالوانی «آهن - مس» جرم اولیه تیغه‌های آندی و کاتدی برابر است. اگر پس از گذشت مدتی، تفاوت جرم تیغه‌های آندی و کاتدی به ۱۴۴۰ گرم برسد، شمار الکترون‌های مبادله‌شده برابر چند است و در صورت مصرف این تعداد الکترون در فرایند هال، چند میلی‌لیتر آلومینیم مذاب تولید می‌شود؟ (چگالی فلز آلومینیم را 2.7 g.cm^{-3} در نظر بگیرید؛ $\text{Cu} = 64, \text{Fe} = 56, \text{Al} = 27 : \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) $80 - 1/4448 \times 10^{25}$ (۲) $80 - 2/709 \times 10^{25}$

(۳) $150 - 1/4448 \times 10^{25}$ (۴) $150 - 2/709 \times 10^{25}$

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله دهم

پایه دوازدهم

تاریخ برگزاری: ۲۸/دی/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

جمع بندی نیم سال اول

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان
هندسه	محمدطاهر شعاعی - حمید گلزاری - محمد گودرزی - صبا مهدوی - حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته	علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی
فیزیک	امین امینی - یاشار انگوتی - علیرضا جباری - مجید ساکی - رضا سبزمیدانی نوید شاهی - علیرضا عبداللہی - حامد نبی منصور - محمدرضا یاری
شیمی	یاسر راش - عباس سرمایه - حسین شرانلو - اکبر فروزان فر - متین قنبری

نام درس	مستول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان	شمیم پهلوان شریف	محمدسجاد نقیہ عادل حسینی سجاد داوطلب	محمدرضا راسخ منصور زرکش اصفهانی
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	زہرا جالینوسی فرزانه خاکپاش ماہان فنی فر
ریاضیات گسسته	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی مریم نظری	فرزانه خاکپاش علیرضا کاظمی بقا ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری محمدجواد سورچی علیرضا عبداللہی	علیرضا جباری	مریم حسن لو مہدی خوشنویس مدیا عیدی احسان محمدی امیر محمودی انزلی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	سروش عبادی یاسر راش	محمد مرادی سروش عبادی	یاسر راش هومن زندگی حسین شکوہ آرمین عظیمی متین قنبری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاچانپور



آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	راضیه سادات خلدی نسب - زهرا صفری محیا غنی فرد - زهرا فرهادی مهر مریم مسلمی زاده - ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	سحر ازلی تاش - مریم حسین زاده سارا حاتمی - سپیده سخایی مائده صبری - نیلوفر فرخجسته مهدیه گل پور - لیلا نعمت پور



۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - [-x]}{1+x}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۴) $-\infty$

۳) -1

۲) صفر

۱) $+\infty$



Hint از شر براکت خلاص شو و بعد یه حد ساده رو حل کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا باید به دست آوریم که در یک همسایگی راست $x = -1$ عبارت $[-x]$ برابر چه عددی است:

$$x \rightarrow (-1)^+; x > -1 \Rightarrow -x < 1 \Rightarrow [-x] = 0$$

گام دوم: پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - [-x]}{1+x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2}{1+x} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

چندجمله‌ای $f(x) = x^{13} - 16x^9 + x^3 + ax + b$ بر $x^2 - 3x + 2$ بخش پذیر است. باقی مانده تقسیم $f(x) + f(2x+1)$ بر

۲

$x+1$ کدام است؟

$$f(1) = f(2) = 0$$

۱۰۸ (۴)

۳۶ (۳)

۱۴۴ (۲)

۷۲ (۱)



Hint

درس Box

با جای گذاری $x=1$ و $x=2$ در $f(x)$ مقادیر مجهول a و b در ضابطه تابع f رو به دست بیار و بعد برو سراغ خواسته سؤال.

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر چندجمله‌ای $p(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت و باقی مانده به دست آمده را $q(x)$ و $r(x)$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

باقی مانده خارج قسمت مقسوم علیه مقسوم

برای به دست آوردن باقی مانده $f(x)$ بر $p(x) = ax + b$ به جای x ، مقدار $x = -\frac{b}{a}$ (ریشه مقسوم علیه) را جای گذاری

می کنیم تا $r = f(-\frac{b}{a})$ به دست آید و اگر باقی مانده صفر باشد، در واقع $r = f(-\frac{b}{a}) = 0$ است. اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر

چندجمله‌ای $p(x)$ بخش پذیر باشد، بر همه عامل های $p(x)$ بخش پذیر است. به عنوان مثال:

(۱) اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $p(x) = x - a$ بخش پذیر باشد، در این صورت:

$$f(x) = (x - a)q(x) + r \Rightarrow f(a) = 0$$

(۲) اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x) = (x - a)(x - b)$ بخش پذیر باشد، در این صورت:

$$f(x) = (x - a)(x - b)q(x) + r \Rightarrow \begin{cases} f(a) = 0 \\ f(b) = 0 \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (به دست آوردن مقادیر مجهول a و b):

از آن جا که $f(x)$ (مقسوم) بر $x^2 - 3x + 2$ (مقسوم علیه) بخش پذیر است، پس بر همه عامل های $x^2 - 3x + 2$ یعنی $(x - 2)$ و $(x - 1)$ بخش پذیر است و در واقع داریم:

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

پس:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^{13} - 16(1)^9 + 1^3 + a(1) + b = 0 \Rightarrow -14 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = 14$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 2^{13} - 16 \times (2)^9 + 2^3 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2^{13} - 2^{10} + 8 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -8$$

که با حل دستگاه معادله زیر می توانیم مقادیر a و b را به دست آوریم:

$$\begin{cases} a + b = 14 \\ 2a + b = -8 \end{cases}$$

$$(a - 2a) + (b - b) = 14 - (-8) \Rightarrow -a = 22 \Rightarrow a = -22$$

که با جای گذاری $a = -22$ در $a + b = 14$ مقدار b به دست می آید.

$$a + b = 14 \xrightarrow{a = -22} -22 + b = 14 \Rightarrow b = 36$$

بنابراین ضابطه تابع f برابر است با:

$$f(x) = x^{13} - 16x^9 + x^3 - 22x + 36$$

گام دوم (محاسبه باقی مانده تقسیم $f(x) + f(2x+1)$ بر $x+1$):

برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $f(x) + f(2x+1)$ بر $x+1$ ، باید مقدار $f(x) + f(2x+1)$ به ازای $x = -1$ را به دست آوریم:

$$f(-1) + f(2(-1)+1) = f(-1) + f(-1) = 2f(-1)$$

$$\xrightarrow{f(-1) = (-1)^{13} - 16(-1)^9 + (-1)^3 - 22(-1) + 36 = 72} 2f(-1) = 2(72) = 144 \text{ باقی مانده}$$

نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-a}{x+2}$ را دو واحد به راست انتقال می‌دهیم، سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم، تا نمودار تابع g به دست می‌آید. نقطه برخورد نمودار تابع g^{-1} of g با محور y ها چه عرضی دارد؟ ($a \neq -4$)

$$f(x-2) \rightarrow f(-x-2)$$

$$f(x) \rightarrow f(x-2)$$

$$(g^{-1} \text{ of } g)(0)$$

$$-1$$

$$2$$

$$-2$$

$$1$$

Hint

کرتس Box

با x لجبازی کن و انتقال افقی رو انجام بده. بعد برو سراغ قرینه کردن نسبت به محور y تابع g به دست میاد. حالا g^{-1} of g رو بساز و ...

برای این که از تابع $y = f(x)$ به تابع $y = kf(cx+a)+d$ برسیم، اعمال تغییرات با ترتیب زیر انجام می‌شود:

- (۱) با جمع و منها به چپ و راست می‌کنیم (a)
- (۲) با ضرب و تقسیم منبسط و منقبض می‌کنیم. (c)

جدول زیر را ببینید:

نمودار جدید (با فرض $a > 0$)	نحوه اعمال تغییرات
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(cx), c > 1$	انقباض طولی: نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{c}$ فشرده می‌کنیم.
$f(cx), 0 < c < 1$	انبساط طولی: نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{c}$ منبسط می‌کنیم.

- (۱) ابتدا ضرب و تقسیم را مستقیم اعمال می‌کنیم (k).
- (۲) سپس جمع و منها را اعمال می‌کنیم (d).

نمودار جدید (با فرض $k, a > 0$)	نحوه اعمال تغییرات
$kf(x), k > 1$	انبساط عرضی: نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط می‌کنیم.
$kf(x), 0 < k < 1$	انقباض عرضی: نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض می‌کنیم.
$f(x)+d$	نمودار تابع f را به اندازه d واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-d$	نمودار تابع f را به اندازه d واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.

و برای رسیدن به $f(-x)$ و $-f(x)$ و $-f(-x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$f(-x)$: نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

$-f(x)$: نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

$-f(-x)$: نمودار تابع f را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم.

وارون تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

نکته

ترکیب توابع

فرض کنید دو تابع f و g را داشته باشیم؛ ترکیب این توابع به صورت مقابل تعریف می‌شود:

که در آن ابتدا x به عنوان ورودی وارد تابع g می‌شود. خروجی تابع g (یعنی $g(x)$) به عنوان ورودی وارد تابع f می‌شود؛ یعنی:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

و دامنه آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (اعمال انتقال افقی): ابتدا باید تابع $f(x)$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم، یعنی $f(x-2)$ ؛ پس داریم:

$$f(x-2) = \frac{2(x-2)-a}{x-2+2} = \frac{2x-4-a}{x}$$

گام دوم (قرینه نسبت به محور y ها): برای این که نمودار را نسبت به محور y ها قرینه کنیم باید به جای x ، $-x$ را قرار دهیم؛ یعنی:

$$g(x) = f(-x-2) = \frac{-2x-4-a}{-x}$$

که این ضابطه تابع g است.

گام سوم (به دست آوردن تابع وارون $g^{-1}(x)$): با توجه به نکته، وارون تابع $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $g^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

است؛ پس داریم:

$$g(x) = \frac{-2x-4-a}{-x} \xrightarrow{a=-2, b=-4-a, c=-1, d=0} g^{-1}(x) = \frac{0(x)-4-a}{-x-(-2)} = \frac{-4-a}{-x+2} = \frac{4+a}{x-2}$$

گام چهارم (به دست آوردن نقطه برخورد g^{-1} of g با محور y ها): برای به دست آوردن محل برخورد با محور y ها کافی است

$(g^{-1} \circ f)(0)$ را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$x = 0 \xrightarrow{f(x) = \frac{2x-a}{x+2}} \boxed{\begin{matrix} f(0) \\ -a \\ 2 \end{matrix}} \xrightarrow{g^{-1}(x) = \frac{4+a}{x-2}} g^{-1}\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{4+a}{-\frac{a}{2}-2} = \frac{4+a}{\frac{-a-4}{2}} = -2$$

برای پیدا کردن مقدار $g^{-1} \circ f(0)$ داریم:

$$f(0) = -\frac{a}{2} \Rightarrow g^{-1} \circ f(0) = g^{-1}\left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow g(t) = -\frac{a}{2} \Rightarrow f(-t-2) = -\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{-2t-4-a}{-t} = -\frac{a}{2} \Rightarrow -4t-8-2a = at$$

$$\Rightarrow -(2a+8) = (a+4)t \Rightarrow t = \frac{-2(a+4)}{a+4} = -2$$

تیزبازی

نمودار تابع $y = 2(x-a)^2 - a$ را ۴ واحد به راست و ۴ واحد به پایین انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم و به تابع $y = -2(x-a)^2 - a$ می‌رسیم. مقدار a کدام است؟

۴-۶

۳-۶

۲-۲

۱-۲



از مختصات رأس سهمی استفاده کن!

Hint



۱) گاهی مختصات نقطه‌ای از تابع $y = f(x)$ را داریم و مختصات نقطه نظیر آن در $y = kf(cx+a)+d$ را می‌خواهیم. برای این کار باید همه کارهایی را که برای رسم نمودار $y = kf(cx+a)+d$ طبق ترتیب مراحل انتقال انجام می‌دادیم، روی این نقطه انجام دهیم.

۲) اگر (x_S, y_S) مختصات رأس سهمی باشند، ضابطه سهمی برابر است با:

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S$$

گام اول (مشخص کردن رأس سهمی در تابع اولیه): در $y = 2(x-a)^2 - a$ مختصات رأس سهمی برابر است با: $S(a, -a)$ پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم (اعمال انتقال‌ها): اگر بخواهیم مختصات نقطه نظیر $S(a, -a)$ را در تابع جدید (تابع انتقال‌یافته) به دست آوریم، باید انتقال‌های گفته‌شده در صورت سؤال را به ترتیب روی آن لحاظ کنیم.

انتقال افقی: در ابتدا آن را ۴ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم؛ پس یعنی: $x \rightarrow x-4$, $a \rightarrow a+4$ (طول رأس سهمی) تبدیل می‌شود.

انتقال عمودی: و بعد آن را ۴ واحد به سمت پایین می‌بریم؛ بنابراین داریم:

$$-a \rightarrow -a-4 \text{ (عرض رأس سهمی)}$$

قرینه نسبت به مبدأ مختصات: در نهایت آن را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم؛ پس داریم:

$$(a+4, -a-4) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (-x,-y)} (-a-4, a+4)$$

$$S'(-a-4, a+4)$$

بنابراین مختصات رأس سهمی تابع جدید برابر است با:

گام سوم (به دست آوردن مقدار a):

ضابطه تابع جدید (تابع انتقال‌یافته) با توجه به صورت سؤال $y = -2(x-a)^2 - a$ است که مختصات رأس سهمی آن $S'(a, -a)$ است؛

بنابراین $S'(-a-4, a+4)$ است، پس داریم:

$$a = -a-4 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

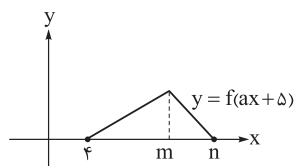
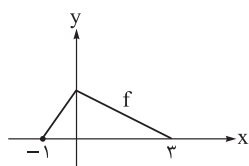
نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f(ax + \Delta)$ به صورت زیر است. حاصل $a + m + n$ کدام است؟

۲۱/۵ (۱)

۱۱/۵ (۲)

۲۴ (۳)

۱۲ (۴)

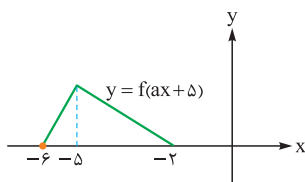
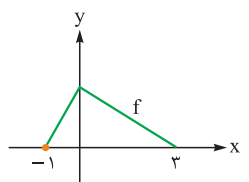


Hint انتقال‌ها رو مرحله به مرحله انجام بده و مقایسه کن! حواست باشه ضریب انبساط افقی برعکسه!

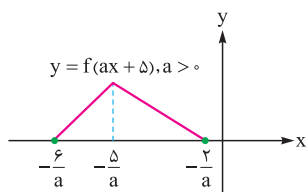
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (اعمال تغییرات):** برای این که از نمودار تابع $y = f(x)$ به نمودار تابع $y = f(ax + \Delta)$ برسیم، ابتدا نمودار f را Δ

واحد به چپ انتقال می‌دهیم:

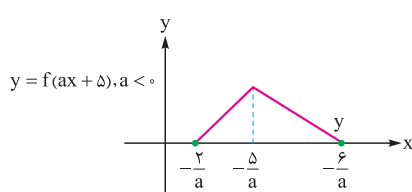
پس داریم:



حالا نمودار به دست آمده را با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می‌کنیم که با توجه به علامت a (این که مثبت باشد یا منفی) یکی از نمودارهای زیر حاصل می‌شود.



(۱)

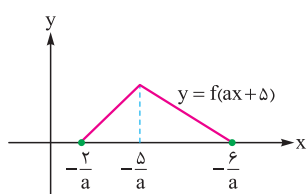


(۲)

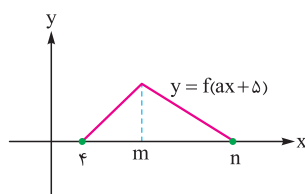
که با توجه به نمودار تابع $y = f(ax + \Delta)$ صورت سؤال، نمودار (۲) مد نظر است، پس $a < 0$ است.

گام دوم (مشخص کردن مقادیر a , m و n):

نمودار انتقال یافته



نمودار صورت سؤال



که با توجه به دو نمودار: $-\frac{2}{a} = 4$ است؛ پس $a = -\frac{1}{2}$. از طرفی $m = -\frac{\Delta}{a}$ و $n = -\frac{6}{a}$ است؛ پس:

$$m = -\frac{\Delta}{-\frac{1}{2}} = 10$$

$$n = -\frac{6}{-\frac{1}{2}} = 12$$

بنابراین حاصل $a + m + n$ برابر است با: $-\frac{1}{2} + 10 + 12 = 21\frac{1}{2}$

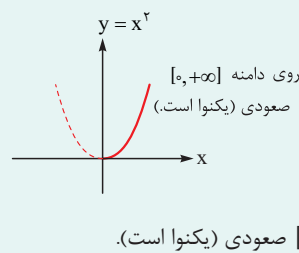
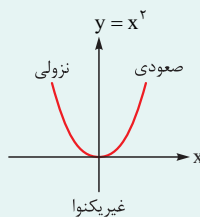
تابع $f(x) = ax^2 - 4ax$ مفروض است. اگر بازه $[-2, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $g(x) = -2f(a - \frac{x}{3})$ روی آن بازه اکیداً نزولی است، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

Hint

درس‌Box

در توابعی مانند $|x|$ و x^2 که در دامنه‌شان غیریکنوا هستند، می‌توانیم با محدود کردن دامنه، تابع یکنوا داشته باشیم. مثلاً x^2 روی $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) غیریکنوا است، اما قبل یا بعد از رأس سهمی یکنوا است. در واقع سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ قسمت‌هایی از دامنه‌اش که رأس سهمی در آن باشد، غیریکنواست.



گام اول (ساختن $g(x) = -2f(a - \frac{x}{3})$) پاسخ‌خیلی تشریحی ✓

$$f(x) = ax^2 - 4ax = a(x-2)^2 - 4a \xrightarrow{x \rightarrow (a - \frac{x}{3})} f(a - \frac{x}{3}) = a(a - \frac{x}{3} - 2)^2 - 4a$$

$$\xrightarrow{x(-2)} g(x) = -2a(\frac{x}{3} - a + 2)^2 + 8a = -\frac{2a}{9}(x - (3a - 6))^2 + 8a$$

گام دوم (به دست آوردن مقدار a): با توجه به این که سهمی با محدود کردن دامنه‌اش (قبل یا بعد رأس سهمی) یکنواست؛ پس از آن‌جا که $[-2, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع در آن اکیداً نزولی است، پس $x = -2$ طول رأس سهمی است؛ پس:

$$x_s = 3a - 6 = -2 \Rightarrow 3a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

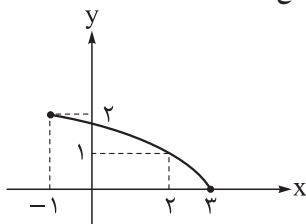
تیزبازی

به جای مشخص کردن ضابطه تابع $g = -2f(a - \frac{x}{3})$ رأس سهمی f رو مشخص کن و انتقال‌ها رو انجام بده.

$$f(x) = ax^2 - 4ax \Rightarrow x_s = 2$$

$$2 \xrightarrow{\text{واحد } a \text{ چپ}} 2 - a \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ و } 3 \text{ برابر}} -3(2 - a) = -2 \Rightarrow 3a - 6 = -2 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

نمودار تابع f به صورت زیر است. مجموعه جواب‌های نامعادله $(f \circ f)(x) \geq 1$ شامل چند عدد صحیح است؟



۵ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)

Hint

طبق شکل داری می‌بینی $f(2) = 1$ هست؛ پس طرف راست تساوی بنویس $f(2)$ و با توجه به نزولی بودن تابع شروع کن به حل نامعادله. (حواست به دامنه $f \circ f$ هم باشه.)

یکنوایی

• اگر تابع f اکیداً صعودی باشد:

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

که می‌توان از این نکته در حل نامساوی‌ها استفاده کرد و گفت اگر تابع f اکیداً صعودی باشد و آن را از دو طرف نامساوی حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند:

$$f(u) > f(v) \xrightarrow{\text{f اکیداً صعودی}} u > v$$

جهت علامت تغییر نکرد

• اگر تابع f اکیداً نزولی باشد:

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

اگر تابع f اکیداً نزولی باشد در یک نامساوی اگر آن را از طرفین نامساوی حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند:

$$f(u) > f(v) \xrightarrow{\text{f اکیداً نزولی}} u < v$$

جهت علامت تغییر کرد

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (حل نامساوی):

$$(f \circ f)(x) \geq 1 \xrightarrow{f(2)=1 \text{ طبق شکل}} (f \circ f)(x) \geq f(2)$$

با توجه به شکل می‌بینیم $f(x)$ اکیداً نزولی است؛ پس:

$$f(\underbrace{f(x)}_u) \geq f(\underbrace{2}_v) \xrightarrow{f \text{ نزولی اکیداً}} u < v \rightarrow f(x) \leq 2$$

از طرفی با توجه به شکل $f(-1) = 2$ است؛ پس داریم:

$$f(x) \leq 2 \Rightarrow f(x) \leq f(-1)$$

که با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع f :

$$f(x) \leq f(-1) \xrightarrow{\text{جهت علامت عوض می‌شود.}} x \geq -1$$

گام دوم (به دست آوردن دامنه تابع $f \circ f$): باید حواسمان باشد که x ‌های به دست آمده باید در دامنه تابع $f \circ f$ حضور داشته باشند؛ پس نیاز به دامنه تابع $f \circ f$ داریم.

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

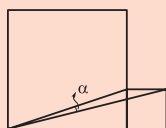
طبق شکل دامنه تابع f برابر $[-1, 3]$ است؛ پس:

$$D_{f \circ f} = \{x \in [-1, 3] \mid f(x) \in [-1, 3]\} = [-1, 3]$$

گام سوم (به دست آوردن جواب نامعادله): با توجه به بازه‌های به دست آمده در گام اول و دوم داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{گام اول: } x \geq -1 \\ \text{گام دوم: } -1 \leq x \leq 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک می‌گیریم}} -1 \leq x \leq 3$$

پس جواب نامعادله، $-1 \leq x \leq 3$ است که اعداد صحیح $3, 2, 1, 0, -1$ و -1 که تعداد آن‌ها برابر ۵ است در این بازه هستند.



در شکل مقابل دو مربع با ابعاد ۱ و ۳ رسم شده است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{8}$

(۱) $\frac{1}{7}$

(۴) $\frac{1}{13}$

(۳) $\frac{1}{10}$



به کمک رابطه تانژانت مجموع دو کمان و در نظر گرفتن زاویه‌ای دیگر کنار زاویه α ، مقدار $\tan \alpha$ رو به دست بیار.

Hint

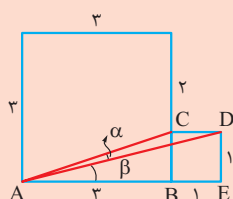
درس Box

برای دو کمان α و β داریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \xrightarrow{\text{اگر } \beta = \alpha} \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (مشخص کردن زاویه β و به دست آوردن مقدار $\tan \beta$ و $\tan(\alpha + \beta)$): با در نظر گرفتن زاویه‌ای مانند β در شکل



مقابل و در مثلث ADE داریم:

$$\tan \beta = \frac{\text{ضلع مقابل (DE)}}{\text{ضلع مجاور (AE)}} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

و در مثلث ABC برای زاویه $(\alpha + \beta)$ داریم:

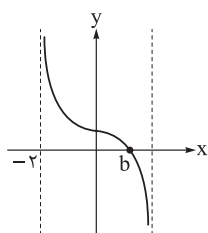
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\text{ضلع مقابل (BC)}}{\text{ضلع مجاور (AB)}} = \frac{1}{3}$$

گام دوم (به دست آوردن مقدار $\tan \alpha$ از رابطه تانژانت مجموع دو کمان):

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \xrightarrow{\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}, \tan \beta = \frac{1}{4}} \frac{1}{3} = \frac{\tan \alpha + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4} \tan \alpha}$$

$$\Rightarrow 3 \tan \alpha + \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} \tan \alpha \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{13}{4} \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{13}$$

نمودار تابع $y = 1 + \tan\left(\frac{a\pi}{4}x\right)$ به صورت زیر است. دوره تناوب تابع $y = a - b \cos\left(\frac{\pi}{a-b}x\right)$ کدام است؟



(۱) $\frac{4}{3}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۳

(۴) ۶

Hint

ابتدا به کمک دوره تناوب، مجهول a رو به دست بیار و بعد از نقطه $(b, 0)$ کمک بگیر تا مجهول b هم به دست بیاد. حالا راحت می‌تونی دوره تناوب $y = a - b \cos\left(\frac{\pi}{a-b}x\right)$ رو به دست بیاری.

درس‌Box

در توابع $y = a \cot(bx)$ و $y = a \tan(bx)$ داریم:

(۱) این توابع متناوب هستند و فاصله بین هر دو مجانب قائم متوالی برابر دوره تناوب است که مقدار آن برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|b|}$$

(۲) در نقاط $\frac{2\pi}{b}$ ، $\frac{\pi}{b}$ ، $-\frac{\pi}{b}$ و ... تعریف نشده‌اند.

(۳) برد تابع برابر $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) است.

دوره تناوب $y = \cos ax$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (به دست آوردن مقدار a): با توجه به نمودار رسم‌شده، دوره تناوب (فاصله بین دو مجانب رسم‌شده) برابر است با:

$$2(2) = 4$$

$$T = \frac{\pi}{\left|\frac{a\pi}{2}\right|}$$

با توجه به این‌که تابع نزولی است، پس $a < 0$ است؛ بنابراین:

$$T = \frac{\pi}{\left|\frac{a\pi}{2}\right|} = \frac{2}{|a|} \xrightarrow{a < 0} T = \frac{2}{-a}$$

$$T = \frac{2}{-a} = 4 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

پس:

تا این‌جا با جای‌گذاری $a = -\frac{1}{2}$ داریم: $y = 1 + \tan\left(-\frac{\pi}{4}x\right)$

گام دوم (به دست آوردن مقدار b): با توجه به شکل، تابع $\tan$ در $x = b$ اولین برخورد را با محور x ‌ها دارد، پس به ازای $x = b$ تابع $\tan$ داده‌شده برابر صفر است:

$$y(b) = 1 + \tan\left(-\frac{\pi}{4}b\right) = 0 \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}b\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4}b = \frac{\pi}{4} \Rightarrow b = 1$$

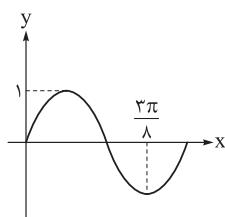
گام سوم (به دست آوردن دوره تناوب $y = a - b \cos\left(\frac{\pi}{a-b}x\right)$): با جای‌گذاری مقادیر a و b داریم:

$$y = -\frac{1}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{-\frac{1}{2}-1}x\right) = -\frac{1}{2} - \cos\left(-\frac{2\pi}{3}x\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\left|-\frac{2\pi}{3}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$$

که دوره تناوب آن برابر است با:

بخشی از نمودار تابع $f(x) = c + a \cos^2(bx - \frac{\pi}{4})$ در یک دوره تناوب آن به صورت زیر است. حاصل $c + ab$ کدام است؟ ($b > 0$)



۵ (۱)

۴ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)



ابتدا ضابطه تابع رو به کمک روابط مثلثاتی ساده تر بنویس!

Hint

درسی Box

به دست آوردن پارامترهای a ، b و c در $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$

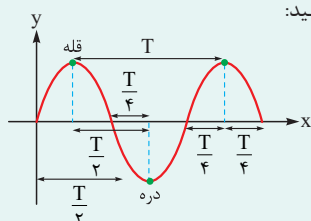
$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

برای به دست آوردن پارامتر b می توان از دوره تناوب استفاده کرد.

در یک تابع سینوسی یا کسینوسی فاصله دو قله متوالی = فاصله دو دره متوالی = T (دوره تناوب) می باشد.

فاصله یک دره و قله متوالی برابر $\frac{T}{4}$ است.

فاصله محل برخورد با محور x ها تا دره یا قله نزدیک آن برابر $\frac{T}{4}$ است. شکل زیر را ببینید:



برای به دست آوردن پارامتر a و c از مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع می توان استفاده کرد. در تابع های $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$

مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع برابر است با:

$$\begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$$

علامت ضرایب a و b نیز بستگی به این دارند که نمودار شبیه $\sin$ یا $-\sin$ ، $\cos$ یا $-\cos$ باشد.

تابع	شکل نمودار	توضیحات
$a \sin(bx)$		شبیه $\sin x$ است. (شیب نمودار در محل برخورد با محور y ها مثبت است)
		شبیه $-\sin x$ است. (شیب نمودار در محل برخورد با محور y ها منفی است)
$a \cos bx$		شبیه $\cos x$ است. (نمودار در $x = 0$ قله دارد)
		شبیه $-\cos x$ است. (نمودار در $x = 0$ دره دارد)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (ساده سازی عبارت): می دانیم $\alpha = 2\cos^2 \alpha + \cos 2\alpha = 1$ است، پس داریم:

$$\cos^2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \cos\left(2bx - \frac{\pi}{2}\right)}{2}$$

بنابراین:

$$f(x) = c + \frac{a}{2} \left(1 + \cos\left(2bx - \frac{\pi}{2}\right)\right) = c + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos\left(2bx - \frac{\pi}{2}\right)$$

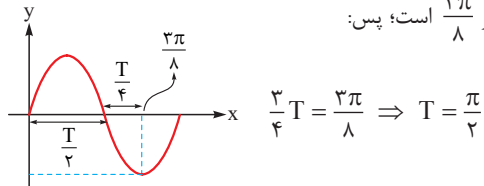
$$\xrightarrow{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2bx\right) = \sin 2bx} f(x) = c + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin(2bx)$$

گام دوم (به دست آوردن مقادیر a و c): با توجه به نمودار، مقدار ماکزیمم برابر ۱ است و $f(0) = 0$. از طرفی نمودار رسم شده در صورت سوال شبیه نمودار $\sin x$ است؛ پس باید $ab > 0$ باشد. با توجه به فرض سؤال $b > 0$ است پس a نیز مثبت است ($a > 0$).

$$\begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow c + \frac{a}{2} + 0 = 0 \Rightarrow a = -2c \quad (*) \\ y_{\max} = 1 \Rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| + c + \frac{a}{2} = 1 \xrightarrow{a > 0} \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + c = 1 \Rightarrow a + c = 1 \\ (*) \ a = -2c \rightarrow -2c + c = 1 \Rightarrow c = -1 \end{cases}$$

پس طبق (*)، $a = -2c = 2$ است.

گام سوم (به دست آوردن مقدار b): با توجه به شکل $\frac{T}{4} + \frac{T}{4}$ برابر $\frac{3\pi}{4}$ است؛ پس:



$$\frac{3}{4}T = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

که این مقدار برابر است با $T = \frac{2\pi}{|2b|}$ ؛ بنابراین:

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{b > 0} b = 2$$

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال (حاصل $c + ab$)):

$$c + ab = -1 + 2(2) = 3$$

در معادله مثلثاتی $\frac{1 + \cos 2x}{\sin x} = 3$ مجموع جواب‌ها در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

$\frac{3\pi}{4}$ (۲)

$\frac{7\pi}{6}$ (۱)

π (۴)

$\frac{3\pi}{2}$ (۳)



Hint ابتدا به کمک اتحادهای مثلثاتی این معادله را ساده کن و بعد معادله به دست آمده بر حسب $\sin x$ رو حل کن و تمام.

اتحادهای مثلثاتی

کرتی Box

پیشنهاد می‌کنم چند اتحاد مهم زیر و نتایج آن‌ها را یاد بگیری:

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \end{cases}$

$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$

$(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2 \sin x \cos x$

$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$

$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 1 + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 1 - \cos^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$

$\sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

معادلات $\cos x = m$ و $\sin x = m$

دقت کنید که باید $-1 \leq m \leq 1$ باشد.

نمودار و	جواب‌ها	جواب‌ها روی دایره مثلثاتی
$\sin x = m$	$x = 2k\pi + \alpha$ $x = 2k\pi + (\pi - \alpha)$	
$\cos x = m$	$x = 2k\pi + \alpha$ $x = 2k\pi - \alpha$	

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (ساده کردن معادله):

$$\frac{1 + \cos 2x}{\sin x} = 3 \xrightarrow{1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x} \frac{2 \cos^2 x}{\sin x} = 3 \xrightarrow{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x} \frac{2(1 - \sin^2 x)}{\sin x} = 3$$

گام دوم (حل معادله مثلثاتی):

$$2 - 2 \sin^2 x = 3 \sin x \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \sin x + 4)(\sin x - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -2 : \text{باشد.} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

که در بازه $(0, 2\pi)$ تنها $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ جوابهای معادله هستند که حاصل جمع آنها برابر است با:

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$$

۱۲ اگر α و β ریشه‌های معادله $\sin x + \cos x = 1/4$ در بازه $(0, \pi)$ باشند به طوری که $\alpha < \beta$ ، حاصل $\tan(\alpha - \beta)$ کدام است؟

$\frac{7}{24}$ (۴)

$-\frac{24}{7}$ (۳)

$-\frac{7}{25}$ (۲)

$-\frac{7}{24}$ (۱)



Hint رابطه‌ای بین α و β پیدا کن!

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (ساده‌سازی عبارت به کمک اتحادها):

با توجه به صورت سؤال $\sin x + \cos x = 1/4$ است. ابتدا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sin x + \cos x = 1/4 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

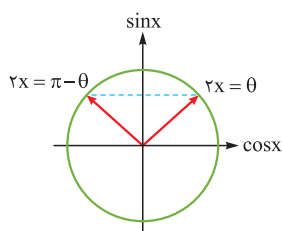
$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{1}{16} \xrightarrow{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} 1 + \sin 2x = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{16} - 1 = -\frac{15}{16}$$

گام دوم (به دست آوردن α و β (جواب‌های معادله)):

در معادله $\sin 2x = -\frac{15}{16}$ ، دنبال $2x$ هایی هستیم که $\sin$ آن‌ها $-\frac{15}{16}$ باشد، اگر

زاویه‌ای حاده مثل θ پیدا کنیم که $\sin \theta = \frac{15}{16}$ باشد هم θ جواب معادله است

و هم $\pi - \theta$. ببینید:



پس $2x = \theta$ و در نتیجه $x = \frac{\theta}{2}$ یا $2x = \pi - \theta$ و در نتیجه $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ است؛ بنابراین α و β که برابر با $\frac{\theta}{2}$ و $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ هستند، جواب‌های معادله هستند.

گام سوم (به دست آوردن حاصل $\tan(\alpha - \beta)$):

$$\tan(\alpha - \beta) \xrightarrow{\alpha = \frac{\theta}{2}, \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}} \tan\left(\frac{\theta}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$= -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cot \theta \xrightarrow{\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \tan(\alpha - \beta) = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\xrightarrow{\theta = 2x} \tan(\alpha - \beta) = -\frac{\cos 2x}{\sin 2x} (*)$$

با توجه به گام اول $\sin 2x = -\frac{15}{16}$ است؛ پس داریم:

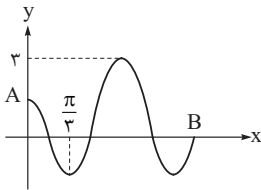
$$\cos^2 2x + \sin^2 2x = 1 \xrightarrow{\sin 2x = -\frac{15}{16}} \cos^2 2x + \frac{225}{256} = 1$$

$$\cos^2 2x = 1 - \frac{225}{256} = \frac{31}{256} \Rightarrow \cos 2x = \pm \frac{\sqrt{31}}{16}$$

که با جای‌گذاری در تساوی (*) خواهیم داشت:

$$\tan(\alpha - \beta) = -\frac{\frac{\sqrt{31}}{16}}{-\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{31}}{15}$$

قسمتی از نمودار $f(x) = a + 2\sin(\frac{b}{6}x + \frac{\pi}{6})$ به صورت مقابل است. شیب پاره خط AB کدام است؟



(۱) $-\frac{6}{5\pi}$

(۲) $-\frac{4}{3\pi}$

(۳) $-\frac{7}{3\pi}$

(۴) $-\frac{12}{5\pi}$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (به دست آوردن مقدار a): با توجه به نمودار ماکزیمم تابع برابر ۳ است. از طرفی در تابع $y = a \sin(bx) + c$ ماکزیمم برابر است با:

$$\max = |a| + c$$

$$\max = |2| + a = 3 \Rightarrow 2 + a = 3 \Rightarrow a = 1$$

که در تابع $f(x)$ داریم:

گام دوم (به دست آوردن مقدار b): از آنجایی که نمودار رسم شده شبیه $-\sin x$ است، پس باید $ab < 0$ باشد a و b ناهم علامت باشند؛ پس $b < 0$ است.

$$f(x) = 1 + 2\sin(bx + \frac{\pi}{6}) \xrightarrow{\sin u = -\sin(-u)} f(x) = 1 - 2\sin(-bx - \frac{\pi}{6})$$

از آنجایی که نمودارمان شبیه $-\sin x$ است، پس درمکانی برابر $\frac{\pi}{4}$ به جای آن که اولین ماکزیمم را داشته باشیم اولین مینیمم را داریم؛ پس باید $-bx - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$ باشد که با توجه به نمودار می بینیم در $x = \frac{\pi}{3}$ این اتفاق می افتد:

$$-bx - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{3}} -b(\frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$$

$$-b(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow b = -2$$

$$f(x) = 1 - 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$$

بنابراین ضابطه $f(x)$ برابر است با:

گام سوم (به دست آوردن مختصات نقطه A): نقطه A محل برخورد تابع $f(x)$ با محور yهاست یعنی جایی که $x = 0$ است؛ پس:

$$A = f(0) = 1 - 2\sin(-\frac{\pi}{6}) = 1 + 2\sin\frac{\pi}{6} = 1 + 1 = 2$$

پس مختصات نقطه A به صورت $A(0, 2)$ است.

گام چهارم (به دست آوردن مختصات نقطه B): نقطه B چهارمین محل برخورد تابع $f(x)$ با محور xهاست؛ پس داریم:

$$f(x) = 1 - 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$$

$$\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0,1} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=0,1} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6} \end{cases}$$

بنابراین چهارمین محل برخورد تابع $f(x)$ با محور xها برابر $\frac{17\pi}{6}$ است؛ پس:

$$2x_B - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6} \Rightarrow x_B = \frac{18\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$$

پس مختصات نقطه B به صورت $B(\frac{3\pi}{2}, 0)$ است.

گام پنجم (محاسبه شیب پاره خط AB):

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \xrightarrow{A(0, 2), B(\frac{3\pi}{2}, 0)} \frac{0 - 2}{\frac{3\pi}{2} - 0} = \frac{-2}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-4}{3\pi}$$

۱۴

نمودار تابع $y = \frac{a \cos \frac{\pi}{6} x - 2b}{2a - \sin \frac{\pi x}{12}}$ در مجاورت $x = 2$ به صورت مقابل است. حداکثر مقدار $[16b]$ کدام است؟
([]، نماد جزء صحیح است.)

(۲) -۱

(۱) ۱

(۴) صفر

(۳) -۲

Hint

اول با توجه به مجانب قائم مقدار a رو به دست بیار. بعد با توجه به شکل تابع وقتی $x \rightarrow 2^+$ رو بررسی کن و اون رو برابر $-\infty$ قرار بده، مقدار b به دست میاد و ...

درستی Box

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ ، $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در یک همسایگی چپ یا راست مخالف صفر باشد، در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$ ؛ بنابراین خط $x = a$ مجانب قائم تابع $\frac{f}{g}$ است که با بررسی حد تابع $\frac{f}{g}$ در مجاورت مجانب قائم می‌توانیم نمودار آن را در همسایگی مجانب قائم تعیین کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (به دست آوردن مقدار a): از آن جا که $x = 2$ مجانب قائم است، پس $x = 2$ ریشهٔ مخرج است؛ بنابراین:
 $2a - \sin \frac{\pi(2)}{12} = 0 \Rightarrow 2a - \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$
گام دوم (محاسبهٔ مقدار b): با توجه به شکل وقتی $x \rightarrow 2^+$ ، نمودار به سمت $-\infty$ می‌رود (در همسایگی راست نمودار به سمت $-\infty$ می‌رود)؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{6} x - 2b}{\frac{1}{4} - \sin \frac{\pi x}{12}} = \frac{\frac{1}{4} \cos(\frac{\pi}{3}) - 2b}{2(\frac{1}{4}) - \sin(\frac{\pi}{6})^+} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} - 2b}{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^+} = \frac{\frac{1}{8} - 2b}{0^-} = -\infty$$

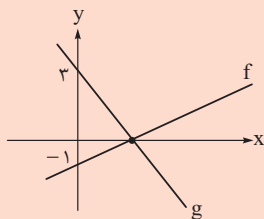
$$\frac{1}{8} - 2b > 0 \Rightarrow b < \frac{1}{16}$$

گام سوم (محاسبهٔ $[16b]$):

$$b < \frac{1}{16} \xrightarrow{\times 16} 16b < 16 \times \frac{1}{16} \Rightarrow 16b < 1 \Rightarrow [16b] \leq 0$$

بنابراین حداکثر مقدار $[16b]$ برابر صفر است.

۱۵ نمودار توابع f و g به صورت زیر است. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f + 2g^{-1})(x)}{(f^{-1} - g)(x)} = -\frac{1}{4}$ باشد، مقدار $f^{-1}(0)$ کدام است؟



(۱) $\sqrt{7}$

(۲) $\sqrt{15}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{3}$

Hint

شیب خطوط رو به دست بیار، از اون جایی که تو صورت و مخرج همه ضرایبی از x هستن، پس توان صورت و مخرج یکیه و راحت با داشتن شیبها می تونی حد رو بررسی کنی.

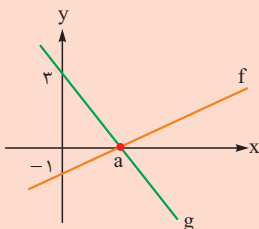
درسی Box

اگر $f(x) = ax + b$ و $(a \neq 0)$ باشد، وارون آن $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ است؛ پس شیب یک خط و وارون آن معکوس یکدیگر هستند.

نکته

اگر (α, β) در تابع f قرار داشته باشد، (β, α) روی وارون آن (یعنی f^{-1}) قرار دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (به دست آوردن شیب خطوط f و g):



اگر محل تلاقی دو خط با محور x ها را a فرض کنیم، داریم:

$$(0, 3), (a, 0) \in g \xrightarrow{\text{محاسبه شیب خط } g} m_g = \frac{3-0}{0-a} = -\frac{3}{a}$$

$$(0, -1), (a, 0) \in f \xrightarrow{\text{محاسبه شیب خط } f} m_f = \frac{-1-0}{0-a} = \frac{1}{a}$$

گام دوم (به دست آوردن شیب خطوط f^{-1} و g^{-1}): با توجه به نکته، شیب وارون یک خط، معکوس شیب خط است، پس:

$$m_{g^{-1}} = -\frac{a}{3}$$

$$m_{f^{-1}} = a$$

گام سوم (محاسبه مقدار a): توان صورت و مخرج هر دو یکی است؛ پس فقط با داشتن مقادیر شیب می توان حد را بررسی کرد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f + 2g^{-1}}{f^{-1} - g} = \frac{\frac{1}{a} + 2(-\frac{a}{3})}{a - (-\frac{3}{a})} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{2a}{3}}{a + \frac{3}{a}} = \frac{\frac{3-2a^2}{3a}}{\frac{a^2+3}{a}} = \frac{3-2a^2}{3a^2+9}$$

که در این مقدار باید طبق صورت سوال برابر $-\frac{1}{4}$ باشد؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f + 2g^{-1}}{f^{-1} - g} = \frac{3-2a^2}{3a^2+9} = -\frac{1}{4} \Rightarrow -3a^2 - 9 = 6 - 4a^2 \Rightarrow a^2 = 15 \Rightarrow a = \pm\sqrt{15}$$

از آن جا که a در قسمت مثبت محور x هاست، پس $a = \sqrt{15}$ قابل قبول بوده و $a = -\sqrt{15}$ غیر قابل قبول است.

گام چهارم (محاسبه مقدار $f^{-1}(0)$): با توجه به شکل $f(a) = 0$ است، پس طبق نکته، $f^{-1}(0) = a$ است:

$$f^{-1}(0) = \sqrt{15}$$

۱۶ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - f(2x))(x + f(x))$ کدام است؟

-۴ (۴)

۴ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)



Hint ابتدا $f(2x)$ رو بساز در $(2x - f(2x))(x + f(x))$ جای گذاری کن. حالا حد در بی نهایت رو حساب کن.

نکته اگر در جمع یا تبدیل رادیکال ها جمله های پرتوان قرینه باشند و با هم حذف بشوند، نمی توانیم بگوییم حد صفر است.

مثلاً در $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - 2x}$ با انتخاب های پرتوان به $x - x = 0$ می رسیم، در صورتی که حد، صفر نمی باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول ساخت $f(2x)$ و جای گذاری در $((2x - f(2x))(x + f(x)))$:

$$f(2x) = \sqrt{(2x)^2 + 4} = \sqrt{4x^2 + 4} = 2\sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow (2x - f(2x))(x + f(x)) = (2x - 2\sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 4})$$

گام دوم (محاسبه حد):

حواسمان هست که حد صفر نیست.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((2x - 2\sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 4})) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2x - 2\sqrt{x^2 + 1}) \times \frac{2x + 2\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 2\sqrt{x^2 + 1}} (x + \sqrt{x^2 + 4}))$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - (4x^2 + 4)}{2x + 2\sqrt{x^2 + 1}} (x + \sqrt{x^2 + 4}) \right) \xrightarrow{\text{استفاده از پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4}{2x + |2x|} (x + |x|) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{-4}{2x + 2x}}_{\frac{-4}{4x}} \underbrace{(x + x)}_{2x} \right) = -2$$



نمودار تابع $f(x) = \frac{\tan 2x}{1 + \cos x}$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند خط مجانب قائم دارد؟ ۱۷

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)



Hint ابتدا به کمک اتحادهای مثلثاتی تابع رو ساده کن، بعد شروع کن به بررسی تعداد مجانب‌های قائم (ببین مخرج چند ریشه داره).

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (ساده‌سازی تابع $f(x)$ به کمک اتحادهای مثلثاتی): می‌دانیم $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$

است؛ پس داریم:

$$f(x) = \frac{\tan 2x}{1 + \cos x} \xrightarrow{\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}} f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x(1 + \cos x)}$$

گام دوم (به دست آوردن ریشه‌های مخرج): برای به دست آوردن تعداد مجانب‌های قائم باید تعداد ریشه‌های مخرج را به دست آوریم:

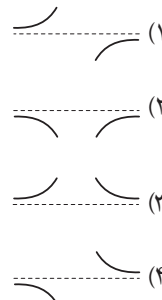
$$\cos 2x = 0 \xrightarrow{\text{جواب‌ها در بازه } (0, 2\pi)} 2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \xrightarrow{\text{جواب‌ها در بازه } (0, 2\pi)} x = \pi$$

پس $f(x)$ ، ۵ مجانب قائم π و $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ ، $\frac{7\pi}{4}$ را دارد.

۱۸ اگر $x = 3$ تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x) = \frac{bx^2 + b}{2x^2 + ax + b}$ باشد، نمودار تابع f در مجاورت مجانب افقی آن کدام است؟

ریشه مضاعف مخرج



Hint

درس Box

مجانب افقی

خط $y = k$ مجانب افقی نمودار تابع f است هرگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$ و یا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$ باشد.

نمودار تابع می‌تواند از بالا یا پایین مجانب افقی به مجانب خودش نزدیک شود که برای تشخیص این موضوع کافی است مجانب را از معادله تابع کم کنیم و بعد مثبت یا منفی بودن عبارت حاصل رو بررسی کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (به دست آوردن ضرایب a و b): از آن جایی که تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ برابر $x = 3$ است، پس $x = 3$ ریشه مضاعف مخرج است؛ بنابراین مخرج به صورت $2(x - 3)^2$ است.

$$2(x - 3)^2 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2x^2 - 12x + 18$$

پس $a = -12$ و $b = 18$ است؛ بنابراین ضابطه $f(x)$ به صورت $f(x) = \frac{18x^2 + 18}{2x^2 - 12x + 18} = \frac{9x^2 + 9}{x^2 - 6x + 9}$ است.

گام دوم (مجانب افقی و چگونگی نزدیک شدن به آن): ابتدا مجانب افقی را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9x^2 + 9}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9x^2}{x^2} = 9$$

حال با تشکیل $f(x) - 9$ مشخص می‌کنیم مقادیر در $+\infty$ یا $-\infty$ مثبت است یا منفی. اگر مثبت بود، تابع f بالای مجانب خود است و اگر منفی بود، تابع f زیر مجانب خود است:

$$f(x) - 9 = \frac{9x^2 + 9}{x^2 - 6x + 9} - 9 = \frac{9x^2 + 9 - 9x^2 + 54x - 81}{x^2 - 6x + 9} = \frac{54x - 72}{x^2 - 6x + 9} = \frac{18(3x - 4)}{(x - 3)^2}$$

این تابع در مجموعه $\{3\} - (\frac{4}{3}, +\infty)$ مثبت است و در بازه $(-\infty, \frac{4}{3})$ منفی است؛ بنابراین در $+\infty$ تابع بالاتر از مجانب افقی است و در $-\infty$ پایین‌تر از آن است.

در نتیجه شکل آن به صورت است.

۱۹ اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} 4 & ; i+j=4 \\ -1 & ; i+j \neq 4 \end{cases}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس $18I - A^2$ چند برابر مجموع درایه‌های ماتریس A است؟

۴/۵ (۴)

۴ (۳)

۷ (۲)

۳/۵ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (پیدا کردن ماتریس A): با توجه به روابط داده شده در صورت سؤال ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم.

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبه ماتریس $18I - A^2$): ماتریس A را به توان ۲ می‌رسانیم و سپس $18I - A^2$ را محاسبه می‌کنیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -7 & -7 \\ -7 & 18 & -7 \\ -7 & -7 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 18I - A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال):

مجموع درایه‌های $18I - A^2$ ، ۴۲ و مجموع درایه‌های ماتریس A ، ۶ است؛ پس خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{42}{6} = 7$$

۲۰. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و غیر صفر باشند، به طوری که $BA = B$ و $AB^T = A$ ، آن گاه کدام گزینه ممکن است نادرست باشد؟
($n \in \mathbb{N}$)

- (۱) $B^{3n} = B^n$
(۲) $A^n = A$
(۳) $AB = B^T$
(۴) $(AB)^T = A$



خواص ضرب ماتریس‌ها

درس‌Box

اگر A ، B و C سه ماتریس و S و T دو عدد حقیقی باشند به طوری که ضرب‌های ماتریسی بین آن‌ها قابل انجام باشد، آن گاه:
(۱) خاصیت شرکت پذیری:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

(۲) اگر $A = B$ ، آن گاه:

$$A \times C = B \times C, \quad C \times A = C \times B$$

(۳) اگر A ماتریسی مربعی باشد به طوری که $A^T = A$ ، آن گاه می‌توان نتیجه گرفت که به ازای همه n های طبیعی، داریم $A^n = A$.

✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینه‌ها را تک تک بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): طرفین تساوی $AB^T = A$ را از چپ در B ضرب می‌کنیم، داریم:

$$BAB^T = BA \xrightarrow{BA=B} BB^T = B \Rightarrow B^T = B \Rightarrow (B^T)^n = B^n \Rightarrow B^{3n} = B^n$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

گزینه (۲):

$$A^T = AA = AB^T A = AB(BA) = ABB = AB^T = A \Rightarrow A^n = A$$

گزینه (۳): اگر $A = I$ و $B = -I$ باشد، آن گاه عبارت گزینه (۳) نادرست است.

$$AB = I \times -I = -I$$

$$B^T = (-I)^T = I$$

گزینه (۴):

$$(AB)^T = ABAB = ABB = AB^T = A$$

۲۱ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{100} کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)



توان ماتریس‌ها:

درس‌Box

اگر A ماتریس مربعی باشد، داریم:

$$A^1 = A, A^2 = A.A, A^3 = A.A.A = A^2.A, \dots, A^n = A.A^{n-1} = A^{n-1}.A$$

توجه: اگر A ماتریس مربعی و m و n اعداد طبیعی باشند، آن گاه:

$$A^m.A^n = A^{m+n}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه ماتریس A^2 و A^3): ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می‌کنیم و سپس ماتریس A^3 را محاسبه می‌کنیم تا به یک

ماتریس ساده برسیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

گام دوم (محاسبه A^{100}): A^{100} را به صورت $A^{99}.A$ می‌نویسیم:

$$A^{100} = A^{99}.A = (-I)^{99}.A = -A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): مجموع درایه‌های ماتریس A^{100} برابر است با:

$$-1 - 1 + 1 + 0 = -1$$

۲۲ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، آن گاه از معادله ماتریسی $AX = A - 2A^{-1}$ مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس X کدام است؟

-۳ (۴)

۴/۵ (۳)

۷ (۲)

-۵/۵ (۱)



درس‌Box

وارون (معکوس) ماتریس: برای هر ماتریس مربعی مانند A ، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی چون B است، به طوری که $AB = BA = I$ در این صورت B را وارون A می‌نامیم و آن را با A^{-1} نشان می‌دهیم.

وارون ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در صورت وجود برابر است با: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

 پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (یافتن معادله ماتریس X):

طرفین معادله $AX = A - 2A^{-1}$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(A - 2A^{-1}) \Rightarrow X = I - 2(A^{-1})^2$$

گام دوم (محاسبه ماتریس $(A^{-1})^2$): ماتریس وارون ماتریس A را به دست می‌آوریم و آن را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -20 & 8 \end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبه ماتریس X): با توجه به رابطه به دست آمده برای ماتریس X در گام اول، آن را محاسبه می‌کنیم.

$$X = I - 2(A^{-1})^2 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -20 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 & 5/2 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس X :

$$10 + (-5/2) = 15/2$$

۲۲ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $BA = \beta I$ و آن گاه دترمینان ماتریس $A + \frac{\alpha}{\beta} B$ کدام است؟

۵ (۴)

۲/۵ (۳)

۱۰ (۲)

۴/۵ (۱)



دترمینان ماتریس 3×3

درس Box

(۱) درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس AB برابر است با حاصل ضرب سطر i ام ماتریس A در ستون j ام با ماتریس B

(۲) اگر، $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ، آن گاه دترمینان این ماتریس به صورت زیر محاسبه می شود:

$$|A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

پس دترمینان برحسب سطر اول به صورت:

$$|A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

توجه: در یک ماتریس 3×3 دلخواه می توان دترمینان را برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که حاصل همواره عددی حقیقی و منحصر به فرد است، ولی بهتر است براساس سطر یا ستونی بسط دهیم که بیشترین صفر را دارا می باشد (تا محاسبات ساده تر شود). به طور کلی علامت هر درایه از ماتریس 3×3 برای محاسبه دترمینان به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه α و β): مطابق فرض سؤال داریم:

$$BA = \beta I \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -5+\alpha & \alpha & -5+\alpha \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

درایه سطر اول و ستون اول ماتریس BA برابر است با $10 = 4 + 4 + 2$ ؛ پس:

$$\beta = 10$$

درایه سطر دوم و ستون اول ماتریس BA برابر است با: $-5 + 0 + \alpha = \alpha - 5$ ؛ پس:

$$\alpha - 5 = 0 \Rightarrow \alpha = 5$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال): با تشکیل ماتریس $A + \frac{1}{\beta} B$ ، دترمینان آن را حساب می کنیم.

$$A + \frac{1}{\beta} B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2/5 & 0 & 2/5 \\ 0/5 & -1 & 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -5/5 & 1 & -5/5 \\ 1/5 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

دترمینان برحسب ستون دوم برابر است با:

$$\left| A + \frac{1}{\beta} B \right| = 1((3 \times 2/5) - (2 \times 1/5)) = 4/5$$

۲۴ اگر $|A|A + A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & -2 \\ 4 & |A| & 3 \\ 0 & |A| & 3 \end{bmatrix}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس وارون پذیر A برابر با کدام گزینه است؟

۳ (۲)

۲ (۱)

-۳ (۴)

-۲ (۳)

مشاوره این سؤال، نمونه دشواری از سؤالی است که نمونه آن را در کتاب درسی و امتحان های نهایی گذشته هم داشته ایم.

درسی Box

اگر A ماتریسی $n \times n$ ، k عددی حقیقی و m عددی طبیعی باشد، آن گاه:

(الف) $|kA| = k^n |A|$ (ب) $|A^m| = |A|^m$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (دترمینان گیری از طرفین تساوی):

از تساوی داده شده در صورت سؤال، نتیجه می گیریم:

$$(|A| + 1)A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & -2 \\ 4 & |A| & 3 \\ 0 & |A| & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |(|A| + 1)A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & -2 \\ 4 & |A| & 3 \\ 0 & |A| & 3 \end{vmatrix} (*)$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال):

با توجه به درس باکس و نیز بسط دترمینان سمت راست تساوی نسبت به سطر اول، از تساوی (*) داریم:

$$(|A| + 1)^3 |A| = |A| (3|A| - 3|A|) - 0 - 2(4|A| - 0) \Rightarrow (|A| + 1)^3 |A| = -8|A|$$

$$\xrightarrow{|A| \neq 0} (|A| + 1)^3 = -8 \Rightarrow |A| + 1 = -2 \Rightarrow |A| = -3$$

۲۵

شکل حاصل از تقاطع یک سطح مخروطی و صفحه‌ای که با محور آن موازی است، کدام است؟

(۲) بیضی

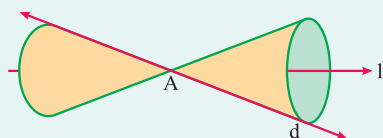
(۱) دایره

(۴) هذلولی

(۳) سهمی

درس‌Box

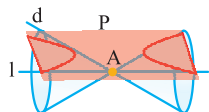
دو خط d و l در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی نامیده می‌شود. در این حالت خط l محور، نقطه A رأس و خط d مولد این سطح مخروطی است.



اگر صفحه P سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را هذلولی می‌نامیم.

مطابق شکل، صفحه P با خط l که همان محور سطح مخروطی است موازی است، پس حتماً این صفحه شامل خط l نیست، پس

هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع می‌کند؛ پس شکل حاصل هذلولی است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

مکان هندسی رأس سوم مثلث‌هایی از صفحه، که در ضلع AB مشترک هستند و تمام آن‌ها مساحت برابر دارند، کدام است؟

(۲) یک خط موازی با AB

(۱) دایره‌ای به مرکز وسط AB

(۴) دو خط موازی با راستای AB

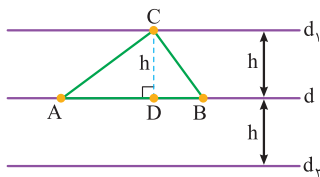
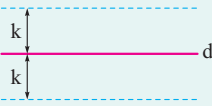
(۳) یک خط عمود بر راستای AB



درتس Box

(۱) اگر دو مثلث با مساحت‌های برابر، قاعده‌های مساوی داشته باشند، ارتفاع آن‌ها با هم برابر است.

(۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت k قرار دارند، دو خط موازی d ، به فاصله k از آن و در دو طرف آن هستند.



گام اول (پیدا کردن ارتفاع مثلث): اگر مساحت تمام مثلث‌ها S را بگیریم، چنانچه رأس سوم یکی از مثلث‌ها C باشد، آن‌گاه چون ضلع AB در همه مثلث‌ها مشترک است، برای برابری مساحت تمام مثلث‌ها باید ارتفاع آن‌ها نیز یکسان باشد؛ یعنی:

$$S = \frac{AB \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2S}{AB} = \text{مقداری ثابت}$$

گام دوم (پیدا کردن مکان هندسی): طبق گام اول متوجه شدیم که فاصله نقطه C از راستای AB مقداری ثابت است؛ پس مکان هندسی آن، دو خط موازی با راستای AB و به فاصله h از آن است.

پاسخ خیلی تشریحی

دو نقطه $(-۱, ۲)$ و $(۳, -۶)$ دو سر قطری از دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ هستند، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

(۲) -۱۷

(۱) -۱۳

(۴) ۱۵

(۳) ۱۱

مشاوره سؤال ساده‌ای که مشابه آن را هم در کتاب درسی داریم و هم در امتحان نهایی داشته‌ایم، طبیعتاً باید سعی کنید که چنین سؤال‌هایی را از دست ندهید.

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

معادله دایره‌ای به مرکز (α, β) و شعاع R به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ است.

گام اول (تعیین مختصات مرکز و طول شعاع دایره): با توجه به شکل فرضی مقابل، اگر دو نقطه A و B دو سر قطر یک دایره باشند، وسط پاره خط AB مرکز دایره و شعاع دایره $r = \frac{1}{2}AB$ است. پس اگر $A(-۱, ۲)$ و $B(۳, -۶)$ آن‌گاه:

$$O\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (۱, -۲)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-۱ - ۳)^2 + (۲ + ۶)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{۱۶ + ۶۴} = \frac{1}{2}\sqrt{۸۰} = \sqrt{\frac{1}{4} \times ۸۰}$$

گام دوم (نوشتن معادله دایره): با معلوم بودن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره را می‌نویسیم:

$$(x - ۱)^2 + (y + ۲)^2 = ۲۰$$

گام سوم (یافتن خواسته سؤال): با تبدیل معادله استاندارد به معادله گسترده، داریم:

$$(x^2 - ۲x + ۱) + (y^2 + ۴y + ۴) = ۲۰ \Rightarrow x^2 + y^2 - ۲x + ۴y - ۱۵ = 0 \Rightarrow a = -۲, b = ۴, c = -۱۵$$

$$a + b + c = -۲ + ۴ - ۱۵ = -۱۳$$

طول وتری از دایره: $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 16 = 0$ که مختصات وسط آن وتر، $(-2, 1)$ است. کدام است؟

۶ (۴)

$2\sqrt{11}$ (۳)

۳ (۲)

$\sqrt{11}$ (۱)

۲۸



معادله گسترده دایره (معادله ضمنی)

درس Box

(۱) اگر معادله استاندارد دایره را باز کنیم، معادله ضمنی یا گسترده دایره به صورت زیر خواهد بود:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

که در آن:

$$\text{شعاع: } R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}} = \sqrt{x_O^2 + y_O^2 - c}$$

مختصات مرکز: $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$

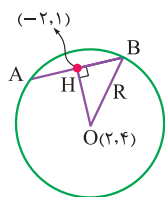
(۲) اگر از مرکز دایره‌ای عمودی بر یک وتر از همان دایره رسم شود، وتر را نصف می‌کند و برعکس؛ اگر مرکز دایره‌ای را به وسط یک وتر از همان دایره وصل کنیم، بر آن وتر عمود است.

گام اول (محاسبه مختصات مرکز و شعاع دایره): طبق فرمول گسترده دایره، مختصات مرکز دایره $O(2, 4)$ و شعاع آن برابر

است با:

$$R = \sqrt{2^2 + 4^2 - (-16)} = 6$$

گام دوم (محاسبه فاصله وسط وتر از مرکز دایره): مطابق شکل، داریم:



$$OH = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (4 - 1)^2} = 5$$

گام سوم (محاسبه طول وتر): می‌دانیم اگر مرکز دایره‌ای را به وسط یک وتر از همان دایره وصل کنیم، بر آن وتر عمود است؛ پس در مثلث قائم‌الزاویه OHB بنابر قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$BH^2 = R^2 - OH^2 = 36 - 25 = 11 \Rightarrow BH = \sqrt{11} \Rightarrow AB = 2BH = 2\sqrt{11}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دو خط به معادله‌های $x - 2y + 1 = 0$ و $2x + y - 1 = 0$ بر دایره‌ای که مرکز آن روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد، مماس‌اند.

حاصل ضرب مقادیر قابل قبول برای شعاع این دایره کدام است؟

۰/۴ (۲)

۰/۲ (۱)

۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳)



درس‌Box

(۱) شعاع دایره بر خط مماس در نقطه تماس عمود است؛ در نتیجه فاصله مرکز دایره از خط مماس با شعاع دایره برابر است.

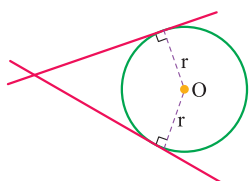
(۲) فاصله نقطه از خط:

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه مختصات مرکز دایره):

مرکز دایره روی خط $y = -x$ (نیمساز ناحیه دوم و چهارم) قرار دارد، پس $O(\alpha, -\alpha)$ مرکز دایره است. حالا چون دو خط داده‌شده بر دایره مماس هستند، فاصله مرکز دایره از هر دوی آن‌ها برابر شعاع دایره است؛ پس داریم:



$$r = \frac{|2\alpha - \alpha - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|\alpha + 2\alpha + 1|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |\alpha - 1| = |3\alpha + 1| \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 3\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = -1 \\ \text{یا} \\ \alpha - 1 = -3\alpha - 1 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

پس مختصات مرکز دایره $(-1, 1)$ یا $(0, 0)$ است.

گام دوم (محاسبه شعاع دایره): با توجه به مقادیر قابل قبول برای مختصات مرکز دایره، مقادیر ممکن برای شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$r = \frac{|2\alpha - \alpha - 1|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{|-2 + 1 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ r = \frac{|0 - 0 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5} = 0/4$$

۳۰ دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 35 = 0$ و $(x+3)^2 + (y+7)^2 = R^2$ متقاطع‌اند. بیشترین مقدار صحیح R کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۱ (۳)

۲۰ (۲)

۱۹ (۱)

۳۰

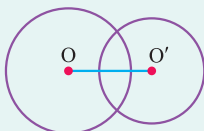


(۱) معادله استاندارد (کلاسیک) دایره:

معادله دایره‌ای که مرکزش نقطه $O(\alpha, \beta)$ و شعاعش برابر R باشد، به صورت زیر است:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

(۲) اگر دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O', r')$ با یکدیگر متقاطع باشند، آن‌گاه داریم:



$$|r - r'| < OO' < r + r'$$

گام اول (محاسبه مختصات مرکز و شعاع دو دایره): با توجه به معادلات داده‌شده، مختصات مرکز و شعاع هر دایره را محاسبه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y - 35 = 0 \Rightarrow O_1\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{-10}{2}\right) = (2, 5), R_1 = \sqrt{4 + 25 + 35}$$

$$\Rightarrow R_1 = \sqrt{64} = 8$$

$$(x+3)^2 + (y+7)^2 = R^2 \Rightarrow O_2(-3, -7), R_2 = R$$

گام دوم (محاسبه بازه ممکن برای R): شرط این‌که دو دایره متقاطع باشند، این است که:

$$|R_2 - R_1| < O_1O_2 < R_2 + R_1$$

پس فاصله بین مراکز دایره‌ها (O_1O_2) را به دست می‌آوریم.

$$O_1O_2 = \sqrt{(2+3)^2 + (5+7)^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$|R - 8| < 13 < R + 8$$

بنابراین داریم:

گام سوم (محاسبه خواسته صورت سؤال): با توجه به نامعادله به دست آمده در گام دوم بازه مقادیر ممکن برای R را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} |R - 8| < 13 \Rightarrow -13 < R - 8 < 13 \Rightarrow -5 < R < 21 \\ 13 < R + 8 \Rightarrow R > 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 5 < R < 21$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار صحیح ممکن برای R ، ۲۰ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۱ اگر a مضرب ۷ باشد ولی مضرب ۱۴ نباشد، باقی مانده تقسیم $a^3 - a - 7$ بر ۸ کدام است؟

۷ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)



Hint در تقسیم بر ۸، برید سراغ زوج یا فرد بودن.

نکته باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** می دانیم a مضرب ۷ است، اگر a زوج باشد، مضرب ۱۴ می شود که با گفته سوال در تناقض است؛ پس a فرد است.

گام دوم: طبق نکته، باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است؛ بنابراین:

$$a^2 \equiv 1 \Rightarrow a^3 \equiv a$$

گام سوم:

$$a^3 - a - 7 \equiv a - a - 7 \equiv -7 \equiv 1$$

$a = 7$ را در عبارت داده شده جاگذاری می کنیم:

$$a^3 - a - 7 = (7)^3 - 7 - 7 = 329$$

$$\begin{array}{r} 329 \overline{) 8} \\ -32 \\ \hline 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -8 \\ \hline \end{array}$$

باقی مانده $\rightarrow 1$

تیزبازی

۳۲ کدام گزینه را نمی‌توان با مثال نقض رد کرد؟

(۱) مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

(۲) مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

(۳) حاصل ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

(۴) حاصل ضرب یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.



Hint

برو سراغ مثال نقض برای رد گزینه‌ها.



(۱) حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

(۲) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

(۳) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ رد گزینه‌ها با مثال نقض:

$$(۱) \text{ گزینه } \alpha = \sqrt{2}, \beta = -\sqrt{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$$

$$(۳) \text{ گزینه } \alpha = \sqrt{5}, \beta = \sqrt{5} \Rightarrow \alpha\beta = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5 \in \mathbb{Q}$$

$$(۴) \text{ گزینه } \alpha = 0, \beta = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha\beta = 0 \times \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$$

عبارت گزینه (۲) را با برهان خلف ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم α یک عدد گویا و β یک عدد گنگ باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $\alpha + \beta$ گنگ است. فرض خلف: $\alpha + \beta$ گنگ نباشد.

بنابراین گویا است. از طرفی می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس تفاضل $\alpha + \beta$ و α گویا است؛ یعنی $\alpha + \beta - \alpha$

گویا است و از آنجا $\beta \in \mathbb{Q}$ که با فرض، یعنی گنگ بودن β در تناقض است؛ در نتیجه فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌گردد.

برای $k \in \mathbb{Z}$ ، اگر $7 \mid 4k + 3$ ، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $49 \mid 12k^2 - 3k + x$ ، مقدار x کدام می‌تواند باشد؟

۴۰ (۴)

۳۳ (۳)

۲۶ (۲)

۱۹ (۱)



ویژگی‌های رابطه عادی کردن

درس‌Box

$$۱) a \mid b \Rightarrow a \mid mb \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$۲) a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$$

$$۳) a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:

$$7 \mid 4k + 3 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 7^2 \mid (4k + 3)^2 \Rightarrow 49 \mid 16k^2 + 24k + 9 \quad (*)$$

گام دوم:

$$7 \mid 4k + 3 \xrightarrow{\times 7} 49 \mid 28k + 21 \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{\text{طبق ویژگی (۱)}} 49 \mid (28k + 21)k \Rightarrow 49 \mid 28k^2 + 21k \quad (**)$$

گام سوم: با استفاده از ویژگی (۲) داریم:

$$(*), (**) \Rightarrow \begin{cases} 49 \mid 16k^2 + 24k + 9 \\ 49 \mid 28k^2 + 21k \end{cases} \xrightarrow{(-)} 49 \mid 12k^2 - 3k - 9$$

$$\xrightarrow{49 \mid 49} 49 \mid 12k^2 - 3k - 9 + 49 \Rightarrow 49 \mid 12k^2 - 3k + 40$$

عدد $k = 1$ در رابطه $7 \mid 4k + 3$ صدق می‌کند، پس داریم:

$$49 \mid 12(1)^2 - 3(1) + x \Rightarrow 49 \mid x + 9$$

در بین گزینه‌ها فقط $x = 40$ در این رابطه صدق می‌کند.

تیزبازی

در عدد سه رقمی $\overline{abc}$ می‌دانیم $a > c$. حاصل $\overline{abc} - \overline{cba}$ را به شکل عدد سه رقمی $\overline{xyz}$ بنویسید. اگر $A = \overline{xyz} + \overline{zyx}$ و $d \mid A$ ، آن‌گاه d چند مقدار مختلف صحیح دارد؟

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۶ (۱)



درس‌Box

باقی‌مانده تقسیم عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ بر ۹:

$$A \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \pmod{9}$$

باقی‌مانده تقسیم عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ بر ۱۱:

$$A \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} \pmod{11}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:

$$\overline{xyz} = \overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$$

$$\Rightarrow \overline{xyz} = 99a - 99c = 99(a - c)$$

پس $\overline{xyz}$ مضرب ۹۹ است، یعنی بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر است و به صورت $\overline{x^9z}$ نوشته می‌شود که $x + z = 9$ است.

دقت کنید که اگر $a - c$ را عددی مثل n در نظر بگیریم ($1 \leq n \leq 9$)، $\overline{xyz}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\overline{n^0} - n = n9(9 - n) = \overline{x^9z}$$

گام دوم: حال عدد A را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \overline{x^9z} + \overline{z^9x} = 100x + 90 + z + 100z + 90 + x$$

$$= 101(x + z) + 180 = 909 + 180 = 1089$$

گام سوم: یعنی عدد A در هر صورت برابر ۱۰۸۹ است و عدد ۱۰۸۹ دارای ۹ مقسوم‌علیه مثبت است:

$$1089 = 99 \times 11 = 3^2 \times 11^2 \Rightarrow (2+1)(2+1) = 9 = \text{تعداد مقسوم‌علیه‌ها}$$

و در نتیجه ۱۸ مقسوم‌علیه صحیح دارد.

۳۵ در گرافی k - منتظم از مرتبه ۶، k حداکثر مقدار ممکن را دارد. اندازه این گراف کدام است؟

۶ (۴)

۹ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)



درس Box

گراف k - منتظم: گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k - منتظم می‌نامیم.

گراف کامل: گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر، مجاور باشد، گراف کامل می‌نامیم. گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم. می‌توان گفت K_n یک گراف n رأسی و $n-1$ - منتظم است.

در گراف G با n رأس، درجه هر رأس حداکثر $n-1$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در گرافی از مرتبه ۶، درجه هر رأس حداکثر ۵ است؛ پس $k = 5$.

گام دوم: در گراف ۵ - منتظم مرتبه ۶ داریم:

$$2q = 6 \times 5 \Rightarrow q = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

در ضمن گراف ۵ - منتظم مرتبه ۶، همان گراف کامل K_6 است.

۳۶ در گراف G مرتبه گراف ۹ و اندازه آن ۱۰ است. در گراف $\bar{G}$ ، حداکثر چند رأس با درجه ۷ داریم؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)



درس Box

اگر G یک گراف n رأسی باشد، آن گاه:

$$q(G) + q(\bar{G}) = q(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه ۹ را به دست می‌آوریم:

$$q(K_9) = \frac{9 \times 8}{2} = 36 \Rightarrow q(G) + q(\bar{G}) = 36$$

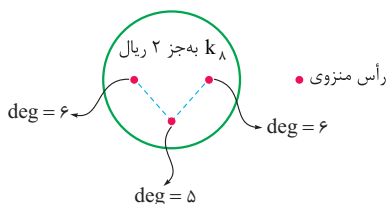
گراف G دارای ۱۰ یال می‌باشد؛ بنابراین:

$$q(G) + q(\bar{G}) = 36 \Rightarrow 10 + q(\bar{G}) = 36 \Rightarrow q(\bar{G}) = 26$$

گام دوم: گراف $\bar{G}$ دارای ۹ رأس و ۲۶ یال می‌باشد، دنبال حداکثر تعداد رأس درجه ۷ هستیم. از طرفی، می‌دانیم گراف K_8

دارای ۸ رأس درجه ۷ و ۲۸ یال است، یعنی ۲ یال بیشتر از گراف $\bar{G}$. برای آن که بیشترین رأس درجه ۷ را داشته باشیم دو یال

مجاور را حذف می‌کنیم:



گام سوم: از ۸ رأس گراف کامل، سه رأس کم شده و ۵ رأس درجه ۷ باقی می‌ماند.

در معادله سیاله خطی $4x + 14y = 22$ ، حداقل مقدار طبیعی سهرقمی برای x کدام است؟ ۳۷

۱۰۰ (۴)

۱۰۱ (۳)

۱۰۲ (۲)

۱۰۳ (۱)



Hint

درس Box

معادله سیاله رو ساده کن و یک جواب اولیه برای آن حدس بزن.

فرم کلی معادله سیاله با دو مجهول x و y به صورت $ax + by = c$ است که در آن $a, b, c \in \mathbb{Z}$ هستند.

شرط لازم و کافی برای آن که معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد، آن است که $(a, b) | c$.

روش حل معادله سیاله:

(۱) تبدیل معادله سیاله به معادله هم‌نهشتی

معادله سیاله $ax + by = c$ را به دو صورت می‌توان به یک معادله هم‌نهشتی (با مجهول x و y) تبدیل کرد:

$$ax + by = c \Rightarrow \begin{cases} ax \equiv c \\ by \equiv c \end{cases}$$

یکی از معادله‌ها را حل کرده و یک متغیر را به دست می‌آوریم. سپس در معادله سیاله قرار داده و متغیر دیگر را به دست می‌آوریم.

(۲) حدس جواب اولیه و فرمول

فرض کنیم (x_0, y_0) جواب اولیه معادله سیاله $ax + by = c$ باشد، جواب کلی معادله سیاله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases}, d = (a, b)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا معادله سیاله $4x + 14y = 22$ را ساده می‌کنیم:

$$4x + 14y = 22 \xrightarrow{\div 2} 2x + 7y = 11$$

گام دوم: یک جواب اولیه برای معادله سیاله حدس می‌زنیم:

$$2x + 7y = 11 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

گام سوم: جواب‌های کلی معادله سیاله را از فرمول به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = 7k + 2 \\ y = 1 - 2k \end{cases}$$

گام چهارم: دنبال کوچک‌ترین عدد طبیعی سهرقمی برای x هستیم:

$$x \geq 100 \Rightarrow 7k + 2 \geq 100 \Rightarrow 7k \geq 98 \Rightarrow k \geq 14$$

کم‌ترین مقدار k برابر ۱۴ است، بنابراین:

$$k_{\min} = 14 \Rightarrow x = 7 \times 14 + 2 = 100$$

اگر ۱۴ فروردین در یک سال، روز سه‌شنبه باشد؛ دومین دوشنبه شهریور همان سال، چندم شهریور است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)



Hint

درس‌Box

اختلاف دو تاریخ داده‌شده را به دست می‌آوریم و هم‌نهشتی به پیمانه ۷ را حساب می‌کنیم. یکی از کاربردهای هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبه روزهای هفته، برحسب تاریخ داده‌شده است. برای محاسبه تاریخ داده‌شده کافی است باقی‌مانده تقسیم اختلاف دو تاریخ داده‌شده را بر ۷ به دست آوریم. اگر تاریخ جلوتر از تاریخ داده‌شده را می‌خواستیم باید به اندازه باقی‌مانده از روز داده‌شده جلو برویم و اگر تاریخ عقب‌تر را می‌خواستیم باید به عقب برویم. در تقویم‌نگاری به نکات زیر دقت کنید:

- هر روز از روزهای هفته، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود.
- شش ماه اول سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال غیر از اسفند (که به‌جز سال کبیسه ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا ببینیم روز اول شهریور چه روزی از هفته است:

$$\text{شهریور اردیبهشت تا مرداد فروردین} \\ d = 17 + 4 \times 31 + 1 = 142 \\ 142 \div 7 = 20 \text{ remainder } 2$$

از سه‌شنبه دو روز جلو می‌رویم؛ پس اول شهریور پنج‌شنبه است.

گام دوم: اول شهریور پنج‌شنبه است، اولین دوشنبه شهریور ۴ روز بعد یعنی $5 = 4 + 1$ شهریور است.

بنابراین دومین دوشنبه، ۷ روز بعد (یک هفته) یعنی $12 = 5 + 7$ شهریور است.

باقی مانده تقسیم $7! + 7^{1000}$ بر ۲۴ کدام است؟ **۳۹**

۱۷ (۴)

۱۱ (۳)

۱ (۲)

۱ صفر



$$\begin{cases} a \equiv b^m \\ a \equiv b^n \end{cases} \Rightarrow a \equiv b^{[m,n]}$$



$$7! \equiv 0 \pmod{24}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: $7!$ بر 24 بخش پذیر است؛ پس:

گام دوم: برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم 7^{1000} بر 24 ، باقی مانده تقسیم را یک بار بر 3 و بار دیگر بر 8 به دست می آوریم:

$$\left. \begin{aligned} 7 &\equiv 1 \Rightarrow 7^{1000} \equiv 1^3 \pmod{3} \\ 7 &\equiv -1 \Rightarrow 7^{1000} \equiv (-1)^8 \pmod{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 7^{1000} \equiv 1 \pmod{24} \Rightarrow 7^{1000} \equiv 1 \pmod{24}$$

در نتیجه:

$$7^{1000} + 7! \equiv 1 \pmod{24}$$

به جور دیگر

$$7^2 \equiv 49 \equiv 1 \pmod{24} \xrightarrow{\text{به توان ۵۰۰}} (7^2)^{500} \equiv 1^{500} \pmod{24} \Rightarrow 7^{1000} \equiv 1 \pmod{24}$$

۴۰ عدد $2x^2 + 7x + 3$ مضرب ۱۷ است و p مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی x است. برای گراف G از مرتبه p که یکی از رئوس آن a است، حاصل $|N_G(a)| + |N_{\bar{G}}(a)|$ کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۵ (۳)

۱۶ (۲)

۱۷ (۱)

همسایگی باز رأس v : مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v » می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم؛ بنابراین:

$$|N_G(v)| = \deg(v)$$

• اگر G یک گراف با n رأس و v یک رأس آن باشد و $d_G(v)$ و $d_{\bar{G}}(v)$ به ترتیب درجه رأس v در گراف‌های G و $\bar{G}$ باشند، آن‌گاه:

$$d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1$$

نکته فرض کنیم p عددی اول باشد، آن‌گاه:

$$ab \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0 \pmod{p} \\ b \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: عدد $2x^2 + 7x + 3$ مضرب ۱۷ است، چون ۱۷ عددی اول است، داریم:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x + 3 &\equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow (2x+1)(x+3) \equiv 0 \pmod{17} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow 2x \equiv -1 \equiv 16 \pmod{17} \xrightarrow{(2,17)=1} x \equiv 8 \pmod{17} \Rightarrow x = 17k + 8 \\ x+3 \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow x \equiv -3 \equiv 14 \pmod{17} \Rightarrow x = 17t + 14 \end{cases} \end{aligned}$$

گام دوم: به دنبال بزرگ‌ترین عدد دورقمی x هستیم:

$$x = 17k + 8 \xrightarrow{k=5} x = 17 \times 5 + 8 = 93$$

$$x = 17t + 14 \xrightarrow{t=5} x = 17 \times 5 + 14 = 99 \checkmark$$

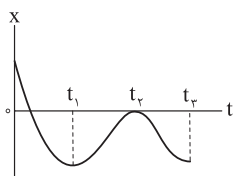
گام سوم: بزرگ‌ترین عدد دورقمی x برابر ۹۹ و مجموع ارقام آن برابر است با:

$$p = 9 + 9 = 18$$

گام چهارم: در گراف G از مرتبه p داریم:

$$|N_G(a)| + |N_{\bar{G}}(a)| = d_G(a) + d_{\bar{G}}(a) = p - 1 = 18 - 1 = 17$$

نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام موارد دربارهٔ حرکت این متحرک درست است؟



- (الف) در بازهٔ زمانی صفر تا t_3 ، جهت حرکت متحرک دو مرتبه تغییر می‌کند.
 (ب) در بازهٔ زمانی صفر تا t_3 ، جهت بردار مکان متحرک دو مرتبه تغییر می‌کند.
 (پ) در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 ، شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.
 (ت) در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 ، اندازهٔ بردار مکان متحرک ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

- (۱) الف و پ
 (۲) ب و ت
 (۳) الف و ت
 (۴) ب و پ



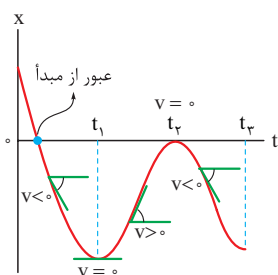
دروس Box

علامت سرعت هر متحرک نشان‌دهندهٔ جهت حرکت آن است. شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان، سرعت آن را نمایش می‌دهد. هر جا که شیب نمودار صعودی است، سرعت مثبت و هر جا نزولی است، سرعت منفی است. برای تغییر جهت حرکت، ابتدا باید سرعت متحرک (شیب نمودار مکان - زمان) صفر و سپس علامت آن عوض شود.

در نمودار مکان - زمان هر متحرک جهت بردار مکان، زمانی تغییر می‌کند که متحرک از مبدأ مکان عبور کند؛ یعنی محور t را قطع کرده و علامت آن قرینه شود.

شتاب متوسط هر متحرک از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آید که در آن Δv ، تغییرات سرعت متحرک و Δt مدت‌زمان آن است. در نمودار مکان - زمان، اندازهٔ بردار مکان، زمانی افزایش می‌یابد که نمودار از محور t (مبدأ مکان) دور شود و زمانی کاهش می‌یابد که نمودار به محور t نزدیک شود.

درستی و نادرستی تک‌تک عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی



- (الف) درست؛ برای تغییر جهت متحرک ابتدا باید سرعت آن صفر شود (که در لحظه‌های t_1 و t_3 این اتفاق افتاده است). سپس باید علامت سرعت تغییر کند (یعنی علامت سرعت قبل و بعد از توقف یکسان نباشد). همان‌طور که می‌بینید در هر دو لحظهٔ t_1 و t_3 علامت سرعت (جهت حرکت) تغییر کرده است.

(ب) نادرست؛ جهت بردار مکان، زمانی تغییر می‌کند که نمودار از مبدأ مکان عبور کند و با توجه به نمودار، متحرک فقط یک مرتبه از مبدأ عبور کرده است.

(پ) نادرست؛ بین لحظه‌های t_1 و t_3 داریم:

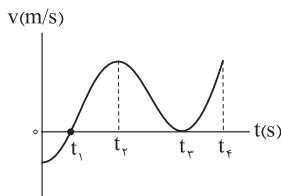
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_3 - v_1}{t_3 - t_1} = \frac{v_3 - v_1}{t_3 - t_1} \xrightarrow[v_1 < 0]{v_3 = 0} a_{av} > 0$$

یعنی شتاب متوسط متحرک در جهت محور x است.

(ت) درست؛ در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک می‌شود، پس اندازهٔ بردار مکان کاهش می‌یابد و سپس از مبدأ دور می‌شود که اندازهٔ بردار مکان افزایش می‌یابد.

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. چه تعداد از موارد زیر درباره حرکت این متحرک

الزاماً درست است؟



(الف) در لحظه t_3 ، جهت حرکت و جهت شتاب متحرک تغییر می کند.

(ب) در بازه ای که شتاب متحرک در خلاف جهت محور X است، متحرک در

جهت محور X حرکت می کند.

(پ) در بازه زمانی صفر تا t_2 ، جهت بردار مکان متحرک یک مرتبه تغییر می کند.

(ت) در بازه زمانی صفر تا t_1 ، متحرک به صورت کندشونده در خلاف جهت محور X حرکت می کند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



درس Box

در نمودار سرعت - زمان متحرک، هنگامی که نمودار با محور t برخورد کند سرعت صفر می شود. اگر محور t را قطع کرده و از آن عبور کند متحرک تغییر جهت می دهد زیرا علامت سرعت عوض شده است.

در این نمودار، شیب خط مماس بر نمودار، شتاب لحظه ای متحرک است که اگر صعودی باشد (شیب مثبت)، شتاب مثبت و اگر نزولی باشد (شیب منفی)، شتاب منفی است.

در نمودار سرعت - زمان هنگامی که نمودار به محور t نزدیک می شود (تندی در حال کاهش است)، حرکت کندشونده بوده و زمانی که نمودار از محور t دور می شود (تندی در حال افزایش است)، حرکت تندشونده است.

درستی و نادرستی عبارت ها را بررسی می کنیم. **پاسخ خیلی تشریحی**

(الف) نادرست؛ در لحظه t_3 سرعت متحرک صفر شده است یعنی شرط اولیه تغییر جهت را دارد اما علامت سرعت تغییر نکرده، یعنی قبل از این لحظه سرعت مثبت و پس از آن هم چنان سرعت مثبت است و چون جهت حرکت همان علامت سرعت است متحرک تغییر جهت نداده است. اما جهت شتاب در این لحظه تغییر کرده زیرا قبل از t_3 شتاب (شیب خط مماس) منفی است، در لحظه t_3 شتاب صفر و پس از آن شتاب مثبت است.

(ب) درست؛ در بازه زمانی t_2 تا t_3 شیب نمودار منفی است، در نتیجه در این بازه شتاب خلاف جهت محور X است و همان طور که از نمودار مشخص است، در این بازه سرعت مثبت است؛ بنابراین متحرک در جهت محور X حرکت می کند.

(پ) نادرست؛ از روی نمودار کیفی سرعت - زمان نمی توان در مورد بردار مکان و تغییر جهت آن به طور دقیق اظهار نظر کرد.

(ت) درست؛ در بازه زمانی 0 تا t_1 نمودار سرعت - زمان متحرک به محور t نزدیک می شود هم چنین می توان گفت که سرعت متحرک منفی و شتاب آن مثبت است؛ بنابراین حرکت کندشونده بوده و متحرک خلاف جهت محور X حرکت می کند.

شتاب متوسط متحرکی در ۴ ثانیه اول حرکت برابر $(-2 \text{ m/s}^2)\vec{i}$ و در ۱۰ ثانیه اول حرکت برابر $(1 \text{ m/s}^2)\vec{i}$ است. اگر سرعت متحرک در لحظه $t_1 = 4 \text{ s}$ برابر $\vec{v}_1 = (8 \text{ m/s})\vec{i}$ باشد، سرعت متحرک در لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ برابر چند متر بر ثانیه است؟

(۲) $-10\vec{i}$

(۱) $10\vec{i}$

(۴) $-26\vec{i}$

(۳) $26\vec{i}$



Hint

از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ تغییرات سرعت را در دو بازه زمانی داده شده محاسبه کرده و سپس یک دستگاه تشکیل دهید تا اختلاف سرعت در بازه $t_1 = 4 \text{ s}$ تا $t_2 = 10 \text{ s}$ به دست آید. حال می‌توانید سرعت را در $t_2 = 10 \text{ s}$ به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: تغییرات سرعت در دو بازه زمانی ۰ تا ۴ s و ۰ تا ۱۰ s را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -2 &= \frac{v_f - v_o}{4} \Rightarrow v_f - v_o = -8 \\ 1 &= \frac{v_{10} - v_o}{10} \Rightarrow v_{10} - v_o = 10 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{با تفریق دو رابطه از هم}} v_{10} - v_f = 18$$

گام دوم: سرعت در لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم:

$$v_{10} - v_f = 18 \xrightarrow{v_f = 8 \text{ m/s}} v_{10} = 26 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_{10} = (26 \text{ m/s})\vec{i}$$

متحرک A با سرعت ثابت $\vec{v}_A = (10 \text{ m/s})\vec{i}$ و متحرک B با سرعت ثابت $\vec{v}_B = (12 \text{ m/s})\vec{i}$ در راستای محور x در حال حرکت هستند. اگر دو متحرک به ترتیب در لحظه‌های $t_1 = 0$ و $t_2 = 2 \text{ s}$ از مبدأ مکان عبور کنند، در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه هر دو از یک مکان عبور می‌کنند؟

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)



درس‌Box

در حرکت متحرک با سرعت ثابت، معادله مکان - زمان (معادله حرکت) آن به صورت زیر یک معادله درجه ۱ است که در این معادله، v سرعت ثابت متحرک بر حسب m/s، x_0 مکان شروع حرکت (مکان متحرک در مبدأ زمان)، t و x هم متغیرهای آن هستند:

$$x = vt + x_0$$

در لحظه‌ای که متحرک از مبدأ عبور می‌کند ($x = 0$) معادله حرکت آن برابر با صفر می‌شود:

$$vt + x_0 = 0$$

در حرکت‌های دارای دو متحرک، برای محاسبه لحظه به هم رسیدن متحرک‌ها یا همان لحظه‌ای که دو متحرک از یک مکان عبور می‌کنند، باید معادله مکان - زمان آن‌ها را مساوی یکدیگر قرار دهیم:

$$x_1 = x_2$$

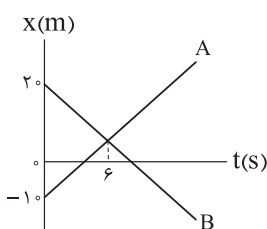
پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا معادله حرکت هر متحرک را می‌نویسیم و لحظه عبور از مبدأ را در هر معادله قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} x_A = 10t + x_{0A} &\Rightarrow 0 = 0 + x_{0A} \Rightarrow x_{0A} = 0 \\ x_B = 12t + x_{0B} &\Rightarrow 0 = 24 + x_{0B} \Rightarrow x_{0B} = -24 \text{ m} \end{aligned}$$

گام دوم: معادله حرکت دو متحرک را مساوی هم قرار می‌دهیم تا لحظه به هم رسیدن آن‌ها را به دست آوریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 10t = 12t - 24 \Rightarrow 2t = 24 \Rightarrow t = 12 \text{ s}$$

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که با سرعت ثابت روی محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. در طی حرکت دو متحرک،



چند ثانیه فاصله آن ها کم تر از ۵۰ m و بیشتر از ۱۰ m است؟

۱۶ (۱)

۱۲ (۲)

۸ (۳)

۴ (۴)



درسی Box

در مسائل دومتحرکه می توانیم فرض کنیم که یکی از متحرک ها ساکن است و دیگری به جای هر دوی آن ها حرکت می کند. به عبارت دیگر، یکی از آن ها را ساکن در نظر گرفته و کمیت هایی مثل جابه جایی، سرعت و ... را برای دیگری نسبت به متحرک ساکن می سنجیم. در این شرایط اگر متحرک ها خلاف جهت یکدیگر حرکت کنند $|v_1| + |v_2|$ و اگر متحرک ها هم جهت حرکت کنند: $|v_1| - |v_2|$ نسبی.

گام اول: با توجه به نمودار، سرعت متحرک A مثبت و سرعت متحرک B منفی است و در لحظه $t = 6$ s به هم می رسند:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = v_A t - 10 \\ x_B = -v_B t + 20 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[t = 6 \text{ s}]{x_A = x_B} 6v_A + 6v_B = 30 \Rightarrow v_A + v_B = 5$$

گام دوم: با توجه به این که سرعت نسبی متحرک ها را 5 m/s به دست آوردیم، فرض می کنیم متحرک B ساکن است و متحرک A با سرعت 5 m/s به سمت آن در حال حرکت است. فاصله اولیه متحرک ها 30 متر است، پس متحرک A باید 20 متر حرکت کند تا فاصله به 10 متر برسد:

$$\Delta x = v \Delta t \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{20}{5} = 4 \text{ s}$$

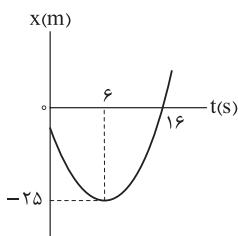
بازه بعدی مورد توجه سؤال، بازه ای است که دو متحرک پس از عبور از کنار هم تا فاصله 10 متری هم رفته اند و مجدداً فاصله بیشتر از 10 است تا لحظه ای که فاصله به 50 متر برسد، یعنی متحرک A باید 40 متر را طی کند.

$$\Delta t_2 = \frac{40}{5} = 8 \text{ s}$$

بنابراین کل زمانی که فاصله کم تر از 50 m و بیشتر از 10 m بوده است $\Delta t = 4 + 8 = 12 \text{ s}$ می باشد.

نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می کند، به صورت سهمی شکل زیر است. سرعت متوسط متحرک

در 8 s اول چند متر بر ثانیه است؟



(۱) -1

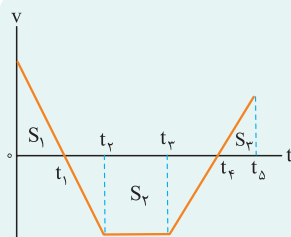
(۲) 1

(۳) -21

(۴) 21

درس Box

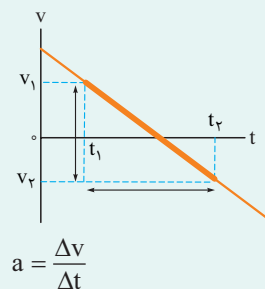
مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t در یک بازه زمانی برابر جابه جایی متحرک است. به این صورت که مساحت های زیر محور t را با علامت منفی و مساحت های بالای محور t را با علامت مثبت قرار داده و آن ها را با یکدیگر جمع جبری می کنیم. هم چنین برای محاسبه مسافت طی شده در این بازه، تمامی مساحت ها را (چه زیر محور t و چه بالای محور t) به صورت مثبت با یکدیگر جمع می کنیم:



$$\Delta x = S_1 - S_2 + S_3$$

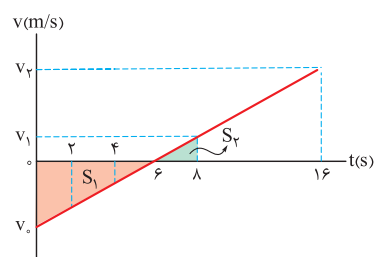
$$l = S_1 + S_2 + S_3$$

در نمودار سرعت - زمان، شیب نمودار بین دو نقطه $(\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1})$ بیانگر شتاب متحرک است. اگر نمودار صعودی باشد، شتاب مثبت و اگر نزولی باشد، شتاب منفی است.



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ روش اول:



گام اول: نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می کنیم. دقت کنید که با توجه به نمودار مکان - زمان، سرعت اولیه منفی و شتاب متحرک مثبت است و متحرک در لحظه $t = 6$ s تغییر جهت داده است. در بازه زمانی $t = 6$ s تا $t = 16$ s جابه جایی متحرک و در نتیجه مساحت محصور بین نمودار $v - t$ و محور t برابر با 25 m است.

$$\Delta x = S_{\text{مثلث}} = 25 \Rightarrow 25 = \frac{1 \times v_1}{2} \Rightarrow v_1 = 50 \text{ m/s}$$

$$a = \text{شیب نمودار} \Rightarrow a = \frac{50}{10} = 5 \text{ m/s}^2$$

گام دوم: حال می توانیم با محاسبه سرعت در لحظه های $t = 8$ s و $t = 0$ ، جابه جایی متحرک در بازه زمانی 0 تا 8 s را به دست آوریم:

$$a = \frac{v_1}{t} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_1 = 1 \text{ m/s}, a = \frac{-v_0}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_0 = -3 \text{ m/s}$$

$$\Delta x = -S_1 + S_2 = -(\frac{3 \times 6}{2}) + (\frac{1 \times 2}{2}) = -8 \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-8}{8} = -1 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_{av} = (-1 \text{ m/s}) \vec{i}$$

گام اول: معادله جابه جایی در حرکت با شتاب ثابت را بین دو لحظه ۶ S تا ۱۶ S می نویسیم و شتاب حرکت را به دست می آوریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \quad \frac{\Delta x = 0 - (-25) = 25 \text{ m}}{v_0 = 0, t = 16 - 6 = 10 \text{ s}} \rightarrow 25 = \frac{1}{2}a(10)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2$$

گام دوم: معادله سرعت را بین دو لحظه ۰ S تا ۶ S می نویسیم و سرعت اولیه را به دست می آوریم:

$$v = at + v_0 \quad \frac{v = 0, a = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2}{t = 6 - 0 = 6 \text{ s}} \rightarrow 0 = \frac{1}{2} \times 6 + v_0 \Rightarrow v_0 = -3 \text{ m/s}$$

گام سوم: معادله سرعت را بین دو لحظه ۶ S تا ۸ S می نویسیم و سرعت متحرک در لحظه ۸ S را پیدا می کنیم:

$$v_8 = at + v_0 \quad \frac{v_0 = 0, a = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2}{t = 8 - 6 = 2 \text{ s}} \rightarrow v_8 = \frac{1}{2} \times 2 + 0 \Rightarrow v_8 = 1 \text{ m/s}$$

گام چهارم: سرعت متوسط متحرک در ۸ S اول حرکت را حساب می کنیم:

$$v_{av} = \frac{v_0 + v_8}{2} \quad \frac{v_0 = -3 \text{ m/s}}{v_8 = 1 \text{ m/s}} \rightarrow v_{av} = \frac{-3 + 1}{2} = -1 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_{av} = (-1 \text{ m/s})\vec{i}$$

متحرکی با شتاب ثابت 2 m/s^2 از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی با شتابی ثابت به بزرگی 3 m/s^2 حرکتش کند می‌شود تا متوقف شود. اگر اندازه سرعت متوسط متحرک از لحظه شروع حرکت تا توقف آن برابر 15 m/s باشد، مسافت طی شده توسط متحرک در 10 ثانیه دوم حرکت چند متر است؟

۲۲۵ (۲)

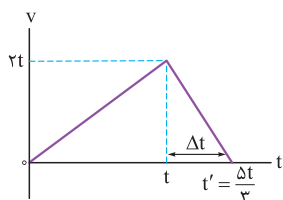
۱۵۰ (۱)

۲۳۷/۵ (۴)

۱۶۷/۵ (۳)



پاسخ خیلی تشریحی ✓



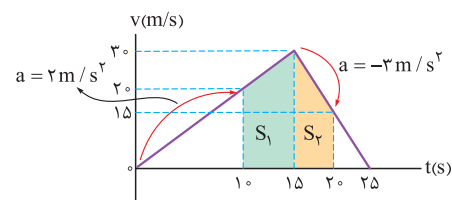
گام اول: ابتدا نمودار سرعت - زمان متحرک را با توجه به توضیحات صورت سؤال رسم می‌کنیم. اگر مدت زمان مرحله اول حرکت را t در نظر بگیریم، سرعت نهایی مرحله اول و سرعت اولیه مرحله دوم برابر $2t$ خواهد بود (زیرا شتاب مرحله اول $a = 2 \text{ m/s}^2$ است). لحظه t' نیز روی نمودار با توجه به شیب نمودار ($a = -3 \text{ m/s}^2$) به دست می‌آید:

$$|a| = \text{شیب نمودار} = 3 \Rightarrow 3 = \frac{2t}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{2t}{3} \Rightarrow t' = t + \frac{2t}{3} = \frac{5t}{3}$$

گام دوم: با توجه به این که سرعت متوسط در کل حرکت 15 m/s است می‌توانیم t را به دست آوریم:

$$\Delta x_{\rightarrow t'} = v_{av} t' \Rightarrow \Delta x_{\rightarrow t'} = 15 \times \frac{5t}{3} \xrightarrow{\Delta x = \text{مساحت زیر نمودار}} \frac{\frac{5t}{3} \times 2t}{2} = 15 \times \frac{5t}{3} \Rightarrow t = 15 \text{ s}$$

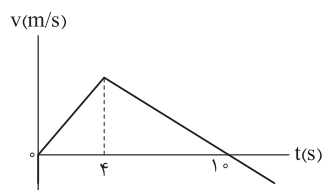
گام سوم: حال نمودار را به صورت زیر تکمیل می‌کنیم و مساحت زیر نمودار را در بازه زمانی $t = 10 \text{ s}$ تا $t = 20 \text{ s}$ محاسبه می‌کنیم:



$$\ell = S_1 + S_2$$

$$\ell = \left(\frac{20 + 30}{2} \times 5 \right) + \left(\frac{15 + 30}{2} \times 5 \right) = 237.5 \text{ m}$$

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در ۴ ثانیه سوم، چند برابر اندازه سرعت متوسط آن در بازه زمانی $t_1 = ۲$ s تا $t_2 = ۶$ s است؟



$$\frac{1}{9} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۲)$$

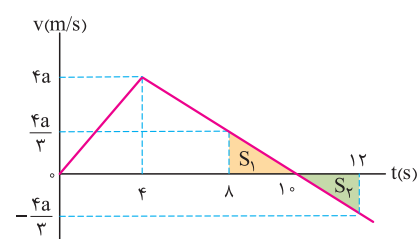
$$\frac{2}{19} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{19} \quad (۴)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** در بازه زمانی ۰ تا ۴ s، اگر شتاب متحرک a باشد، ابتدا روی محور v نقاطی را برحسب a مشخص می کنیم تا تندی

متوسط در ۴ ثانیه سوم را به دست آوریم. خواهیم داشت:



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{4s \rightarrow 10s} = \frac{0 - 4a}{10 - 4} = -\frac{4a}{6} = -\frac{2a}{3}$$

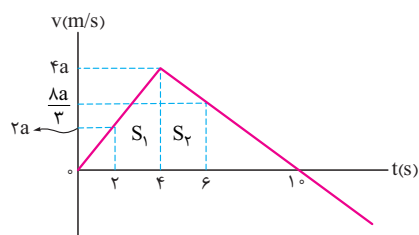
$$v_{4s} = 4a - 4\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{4a}{3}$$

$$v_{12s} = 0 - 2\left(\frac{2a}{3}\right) = -\frac{4a}{3}$$

$$\ell = S_1 + S_2 = \left(-\frac{2 \times \frac{4a}{3}}{2}\right) + \left(\frac{2 \times \frac{4a}{3}}{2}\right) = \frac{4a}{3}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\frac{4a}{3}}{4} = \frac{2a}{3}$$

گام دوم: حال سرعت متوسط در بازه زمانی ۲ s تا ۶ s را به صورت زیر به دست می آوریم:



$$v_{2s} = 0 + 2(a) = 2a$$

$$v_{6s} = 4a - 2\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{4a}{3}$$

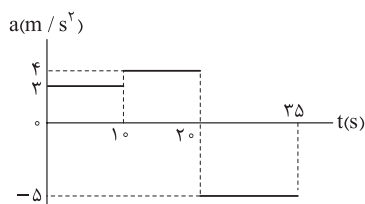
$$\Delta x = S_1 + S_2 = \left(\frac{2a + 4a}{2} \times 2\right) + \left(\frac{\frac{4a}{3} + 4a}{2} \times 2\right) = \frac{34a}{3}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{34a}{3}}{4} = \frac{17a}{6}$$

گام سوم: نسبت تندی متوسط در ۴ ثانیه سوم به سرعت متوسط در بازه زمانی $t = ۲$ s تا $t = ۶$ s به صورت زیر است:

$$\frac{s_{av}}{v_{av}} = \frac{\frac{2a}{3}}{\frac{17a}{6}} = \frac{4}{17}$$

نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر متحرک در مبدأ زمان با تندی ۱۵ m/s ، در خلاف جهت محور x از مبدأ مکان عبور کند، بیشترین فاصله متحرک از مبدأ مکان در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = ۳۵ \text{ s}$ برابر چند متر است؟



$$۳۵۰ \quad (۱)$$

$$۶۵۲/۵ \quad (۲)$$

$$۳۸۷/۵ \quad (۳)$$

$$۶۹۰ \quad (۴)$$

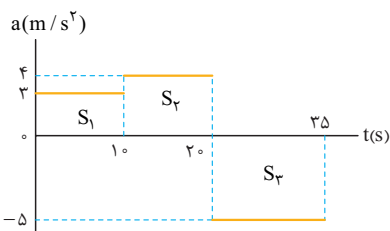


درس Box

مساحت محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور t در هر بازه زمانی بیانگر تغییرات سرعت در آن بازه زمانی است. اگر این مساحت زیر محور t باشد، تغییرات سرعت، منفی و اگر بالای محور t باشد، تغییرات سرعت، مثبت است.

$\Delta v = -S_1 + S_2$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا با استفاده از نمودار شتاب - زمان، نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می کنیم:

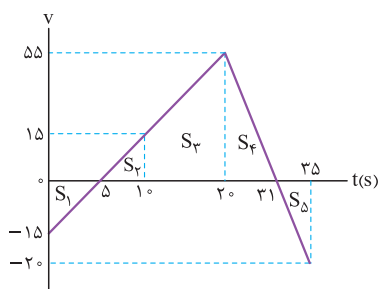


$$\Delta v = S_1 = 3 \times 10 = 30 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = S_2 = 4 \times 10 = 40 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = -S_3 = -5 \times 15 = -75 \text{ m/s}$$

گام دوم: مساحت زیر نمودار سرعت - زمان که بیانگر جابه جایی متحرک است را در بازه های زمانی متوالی محاسبه می کنیم و مسیر حرکت متحرک را روی محور x مشخص می کنیم تا بیشترین فاصله از مبدأ را تعیین کنیم:



$$v = a\Delta t + v_0 \Rightarrow 0 = -5\Delta t + 55 \Rightarrow \Delta t = 11 \text{ s}$$

$$\Rightarrow t = 20 + 11 = 31 \text{ s}$$

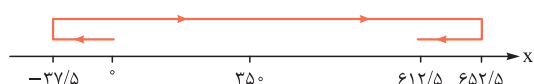
$$\Delta x = -S_1 = -\frac{15 \times 5}{2} = -37/5 \text{ m}$$

$$\Delta x = S_2 = \frac{15 \times 5}{2} = 37/5 \text{ m}$$

$$\Delta x = S_3 = \frac{15 + 55}{2} \times 10 = 350 \text{ m}$$

$$\Delta x = S_4 = \frac{55 \times 11}{2} = 302/5 \text{ m}$$

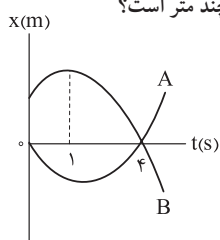
$$\Delta x = -S_5 = -\frac{4 \times 20}{2} = -40 \text{ m}$$



همان طور که مشاهده می کنید، بیشترین فاصله از مبدأ $x = 652/5 \text{ m}$ است.

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که با شتاب ثابت روی محور X حرکت می کنند، به شکل زیر است. اگر در لحظه $t = 3$ s، تندی

دو متحرک به ترتیب 2 m/s و 4 m/s باشد، بیشترین فاصله دو متحرک از یکدیگر در ۴ ثانیه نخست چند متر است؟



۱۲/۵ (۱)

۱۲ (۲)

۱۱/۵ (۳)

۱۴ (۴)

درس Box

معادله های مکان و سرعت در حرکت با شتاب ثابت:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

x = مکان متحرک (m)

x_0 = مکان اولیه متحرک (m)

a = شتاب (m/s^2)

v_0 = سرعت اولیه (m/s)

t = زمان (s)

v = سرعت متحرک در لحظه t (m/s)

$$v = at + v_0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: رأس سهمی A در لحظه t_A است. در این لحظه، سرعت متحرک A صفر می شود:

$$t_A = \frac{0 + 4}{2} = 2 \text{ s}$$

$$v_A = a_A t + v_{0A} \xrightarrow[t_A=2s]{v_A=0} 0 = a_A \times 2 + v_{0A} \Rightarrow v_{0A} = -2a_A$$

از طرفی در لحظه $t = 3$ s تندی متحرک A برابر 2 m/s است. شیب خط مماس بر نمودار A در این لحظه مثبت است؛ پس سرعت متحرک A نیز در لحظه $t = 3$ s برابر با 2 m/s است:

$$v_A = a_A t + v_{0A} \xrightarrow[t_A=2s, v_{0A}=-2a_A]{v_A=2m/s} 2 = a_A \times 3 - 2a_A \Rightarrow a_A = 2 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow v_{0A} = -2 \times 2 = -4 \text{ m/s}$$

بنابراین می توانیم معادله مکان متحرک A را بنویسیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A}t + x_{0A} \Rightarrow x_A = \frac{1}{2} \times 2t^2 - 4t + 0 \Rightarrow x_A = t^2 - 4t$$

گام دوم: رأس سهمی B در لحظه $t_B = 1$ s قرار دارد. در این لحظه سرعت متحرک B صفر می شود:

$$v_B = a_B t + v_{0B} \xrightarrow[t_B=1s]{v_B=0} 0 = a_B \times 1 + v_{0B} \Rightarrow v_{0B} = -a_B$$

در لحظه $t = 3$ s تندی متحرک B برابر 4 m/s است. ولی از آن جا که شیب خط مماس بر نمودار B در این لحظه، منفی است، سرعت متحرک B در لحظه $t = 3$ s برابر با -4 m/s است:

$$v_B = a_B t + v_{0B} \xrightarrow[t_B=1s, v_{0B}=-a_B]{v_B=-4m/s} -4 = a_B \times 3 - a_B$$

$$\Rightarrow -4 = 2a_B \Rightarrow a_B = -2 \text{ m/s}^2 \Rightarrow v_{0B} = -(-2) = 2 \text{ m/s}$$

گام سوم: با توجه به این که مکان متحرک B در لحظه $t = 4$ s به صفر می رسد، می توان نوشت:

$$x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B}t + x_{0B} \xrightarrow[t=4s, x_B=0]{a_B=-2m/s^2, v_{0B}=2m/s} 0 = \frac{1}{2}(-2)4^2 + 2 \times 4 + x_{0B}$$

$$\Rightarrow 0 = -16 + 8 + x_{0B} \Rightarrow x_{0B} = 8 \text{ m}$$

اکنون می توانیم معادله مکان متحرک B را نیز بنویسیم:

$$x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B}t + x_{0B} \Rightarrow x_B = \frac{1}{2}(-2)t^2 + 2t + 8$$

$$\Rightarrow x_B = -t^2 + 2t + 8$$

گام چهارم: بیشترین فاصله دو متحرک زمانی اتفاق می افتد که سرعت آن دو یکسان شود:

$$v_A = v_B \Rightarrow a_A t + v_{0A} = a_B t + v_{0B} \Rightarrow 2t - 4 = -2t + 2$$

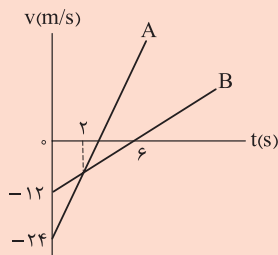
$$\Rightarrow 4t = 6 \Rightarrow t = 1.5 \text{ s}$$

در این لحظه، مکان دو متحرک A و B را به دست آورده و فاصله آن ها از یکدیگر را تعیین می کنیم:

$$t = 1.5 \text{ s} \Rightarrow \begin{cases} x_A = t^2 - 4t = (1.5)^2 - 4(1.5) = 2.25 - 6 = -3.75 \text{ m} \\ x_B = -t^2 + 2t + 8 = -(1.5)^2 + 2(1.5) + 8 = 8.75 \text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_B - x_A = 8.75 - (-3.75) = 12.5 \text{ m}$$

نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور X حرکت می کنند، به شکل زیر است. در مبدأ زمان، دو متحرک به ترتیب در مکان های $x_1 = 0$ و $x_2 = -10$ m قرار دارند. در بازه زمانی ای که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می کنند، فاصله بین آنها چند متر و چگونه تغییر می کند؟



(۱) ۴۵، کاهش می یابد.

(۲) ۴۵، افزایش می یابد.

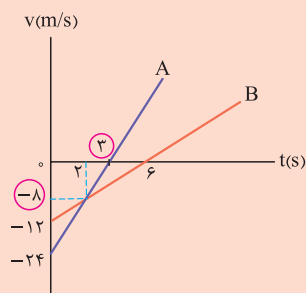
(۳) ۲۷، کاهش می یابد.

(۴) ۲۷، افزایش می یابد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با کمک شیب نمودار متحرک B و معادله سرعت - زمان آن، لحظه تغییر جهت

متحرک A و شتاب متحرک A را به دست می آوریم:



$$a_B = \frac{12}{6} = 2 \text{ m/s}^2 \Rightarrow v_B = 2t - 12 \xrightarrow{t=2 \text{ s}} v_B = -8 \text{ m/s}$$

$$a_A = \frac{16}{2} = 8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow v_A = 8t - 24 \xrightarrow{v_A=0} t = 3 \text{ s}$$

گام دوم: معادله حرکت هر یک از متحرک ها را می نویسیم و فاصله آنها را به دست می آوریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$x_A = \frac{1}{2}(8)t^2 - 24t + 0 \Rightarrow x_A = 4t^2 - 24t$$

$$x_B = \frac{1}{2}(2)t^2 - 12t - 10 \Rightarrow x_B = t^2 - 12t - 10$$

$$|x_B - x_A| = |t^2 - 12t - 10 - 4t^2 + 24t| = |-3t^2 + 12t - 10|$$

گام سوم: حال در بازه زمانی ای که دو متحرک خلاف جهت هم حرکت می کنند، یعنی $t = 3$ s تا $t = 6$ s فاصله آنها را به دست می آوریم:

$$t = 3 \text{ s} \Rightarrow |x_B - x_A| = |-3(9) + 12(3) - 10| = 1 \text{ m}$$

$$t = 6 \text{ s} \Rightarrow |x_B - x_A| = |-3(36) + 12(6) - 10| = 46 \text{ m}$$

بنابراین فاصله بین آنها ۴۵ متر افزایش یافته است.

در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر تندی متوسط گلوله در $\frac{H}{۲}$ ابتدای مسیر، برابر ۱۰ m/s باشد، تندی گلوله در لحظه برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰ \text{ m/s}^2$)

۴۰ (۴)

۲۰ (۳)

$۲۰\sqrt{۲}$ (۲)

$۱۰\sqrt{۲}$ (۱)



درس‌Box

مطابق شکل زیر، اگر گلوله‌ای در شرایط خلأ رها شود و به اندازه d جابه‌جا شده باشد، برای محاسبه تندی گلوله در انتهای مسیر، از معادله مستقل از زمان استفاده می‌کنیم؛ بنابراین داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2ad \xrightarrow[v_0=0]{a=g} v = \sqrt{2gd}$$

$\uparrow$ تندی در انتهای مسیر (m/s)
 $\downarrow$ مقدار جابه‌جایی از لحظه رهاشدن (m)
 $\downarrow$ شتاب گرانش (m/s^2)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** تندی متوسط گلوله در $\frac{H}{۲}$ ابتدای مسیر برابر ۱۰ m/s است. پس تندی گلوله در ارتفاع $\frac{H}{۲}$ برابر می‌شود با: (v' تندی گلوله در ارتفاع $\frac{H}{۲}$ است.)

$$v_{av} = \frac{v' + v_0}{۲} \xrightarrow[v_0=0]{v_{av}=10 \text{ m/s}} 10 = \frac{v' + 0}{۲} \Rightarrow v' = 20 \text{ m/s}$$

گام دوم: حالا مقدار H را حساب می‌کنیم:

$$v = \sqrt{2gd} \xrightarrow[v'=20 \text{ m/s}]{d=\frac{H}{۲}, g=10 \text{ m/s}^2} 20 = \sqrt{2 \times \frac{H}{۲} \times 10} \Rightarrow 10H = 400 \Rightarrow H = 40 \text{ m}$$

گام سوم: تندی گلوله در لحظه برخورد به زمین (پس از جابه‌جایی به اندازه H) را حساب می‌کنیم:

$$v = \sqrt{2gd} \xrightarrow[d=H=40 \text{ m}]{g=10 \text{ m/s}^2} v = \sqrt{2 \times 10 \times 40} = 20\sqrt{۲} \text{ m/s}$$

در شرایط خلأ، از یک بلندی، ابتدا گلوله A و پس از مدتی گلوله B رها می‌شوند. اگر از لحظه رها شدن گلوله B تا ۲ s پس از آن، فاصله بین دو گلوله ۵۰ m افزایش یابد، فاصله بین این دو گلوله در لحظه رها شدن گلوله B، چند متر بوده است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

$$27/5 (2)$$

$$25 (1)$$

$$32/25 (4)$$

$$31/25 (3)$$



دانش Box

اگر جسمی در شرایط خلأ از یک نقطه بالای سطح زمین رها شود، تندی جسم در لحظه t از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{زمان (s)} \rightarrow v = gt \leftarrow \text{تندی جسم (m/s)}$$

$$\text{شتاب گرانش (m/s}^2\text{)}$$

اگر جسمی در شرایط خلأ از یک نقطه بالای سطح زمین رها شود، مقدار جابه‌جایی جسم از لحظه رها شدن تا لحظه t طبق رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\text{زمان (s)} \rightarrow d = \frac{1}{2}gt^2 \leftarrow \text{مقدار جابه‌جایی (m)}$$

$$\text{شتاب گرانش (m/s}^2\text{)}$$

اگر دو جسم در شرایط خلأ با اختلاف زمانی t از یک نقطه بالای سطح زمین رها شوند، نسبت به هم شتاب ندارند و مقدار سرعت نسبی دو جسم (تندی جسم اول در لحظه رها شدن جسم دوم) طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{اختلاف زمانی رها شدن دو جسم (s)} \rightarrow v_{\text{نسبی}} = gt \leftarrow \text{سرعت نسبی دو جسم (m/s)}$$

$$\text{شتاب گرانش (m/s}^2\text{)}$$

از طرفی فاصله دو جسم در هر ثانیه به اندازه نسبی v تغییر می‌کند؛ بنابراین اگر از لحظه رها شدن جسم دوم مدت زمان Δt گذشته باشد، داریم:

$$\text{مدت زمان سپری‌شده از لحظه رها شدن جسم دوم (s)} \rightarrow \Delta t = v_{\text{نسبی}} \leftarrow \text{فاصله نسبی دو جسم (m)}$$

$$\text{سرعت نسبی دو جسم (m/s)}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** سرعت نسبی دو جسم را به دست می‌آوریم. با توجه به این که دو ثانیه پس از رها شدن گلوله B، فاصله دو گلوله ۵۰ متر افزایش یافته است، داریم:

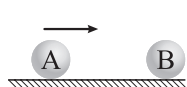
$$d_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}} \Delta t \xrightarrow[\Delta t = 2 \text{ s}]{d_{\text{نسبی}} = 50 \text{ m}} 50 = v_{\text{نسبی}} \times 2 \Rightarrow v_{\text{نسبی}} = 25 \text{ m/s}$$

بنابراین در لحظه رها شدن گلوله B، تندی گلوله A (سرعت نسبی) ۲۵ m/s بوده است.

گام دوم: مقدار جابه‌جایی گلوله A از لحظه رها شدن تا لحظه رها شدن گلوله B (فاصله دو گلوله در لحظه رها شدن گلوله B) را حساب می‌کنیم. با توجه به تندی گلوله A در لحظه رها شدن گلوله B داریم:

$$v = \sqrt{2gd} \xrightarrow[g = 10 \text{ m/s}^2]{v = 25 \text{ m/s}} 25 = \sqrt{2 \times 10 \times d} \Rightarrow 20d = 625 \Rightarrow d = 31/25 \text{ m}$$

در شکل زیر، گوی A به جرم ۴۰۰ g که روی سطح افقی بدون اصطکاک در حال حرکت است، با تندی ۱۲ m/s به گوی ساکن B برخورد کرده و با تندی ۴ m/s در همان راستا باز می‌گردد. اگر جرم گوی B برابر ۸۰۰ g باشد، تندی آن پس از برخورد، به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟



۴ (۲)

۸ (۱)

۲ (۴)

۱۶ (۳)

دروس Box

نیروی خالص (N)

طبق قانون دوم نیوتون، شتاب یک جسم با نیروی خالص وارد بر آن رابطه مستقیم و با جرم جسم رابطه معکوس دارد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$a = \frac{F_{\text{net}}}{m}$$

شتاب (m/s²) ← a = $\frac{F_{\text{net}}}{m}$

جرم (kg)

طبق قانون سوم نیوتون، اگر جسم (۱) بر جسم (۲) نیرویی وارد کند (کنش)، جسم (۲) بر جسم (۱) همان مقدار نیرو را در خلاف جهت وارد می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

طبق قانون سوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم: پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$F_{AB} = F_{BA}$$

از طرفی طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$a = \frac{F_{\text{net}}}{m} \Rightarrow \frac{a_B}{a_A} = \frac{F_B}{F_A} \times \frac{m_A}{m_B} \xrightarrow{F_B=F_A, m_A=0.4 \text{ kg}, m_B=0.8 \text{ kg}} \frac{a_B}{a_A} = 1 \times \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2}$$

در نهایت می‌توانیم بنویسیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \text{ یکسان}} \frac{|a_B|}{|a_A|} = \frac{|\Delta v_B|}{|\Delta v_A|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{v_B - 0}{|-4 - 12|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{v_B}{16} \Rightarrow v_B = 8 \text{ m/s}$$

با توجه به این که اصطکاک نداریم، درمی‌یابیم انرژی مکانیکی پایسته است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

به‌چهره دیگر

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_{1A} + K_{1B} = K_{2A} + K_{2B} \Rightarrow K_{1A} - K_{2A} = K_{2B} - K_{1B} \xrightarrow{K = \frac{1}{2}mv^2} \frac{1}{2}m_A(v_{1A}^2 - v_{2A}^2) = \frac{1}{2}m_B v_{2B}^2$$

$$\xrightarrow{m_A=0.4 \text{ kg}, v_{1A}=12 \text{ m/s}, v_{2B}=4 \text{ m/s}, m_B=0.8 \text{ kg}} \frac{1}{2} \times 0.4 (12^2 - 4^2) = \frac{1}{2} \times 0.8 \times v_{2B}^2 \Rightarrow 25.6 = 0.4 \times v_{2B}^2 \Rightarrow v_{2B}^2 = \frac{25.6}{0.4}$$

$$\Rightarrow v_{2B} = \frac{16}{2} = 8 \text{ m/s}$$

۵۵

گلوله‌ای را در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر بزرگی شتاب گلوله هنگام بالارفتن ۴ برابر بزرگی شتاب آن، هنگام پایین آمدن باشد، اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر گلوله در طی این حرکت، با فرض ثابت بودن، چند برابر وزن گلوله است؟

$\frac{3}{5} (۴)$

$\frac{2}{5} (۳)$

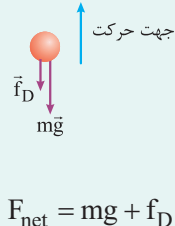
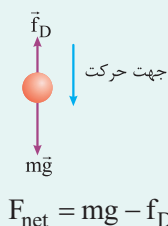
$\frac{3}{4} (۲)$

$\frac{1}{4} (۱)$



درس‌Box

نیروی مقاومت هوا، همواره در خلاف جهت حرکت جسم است؛ بنابراین اگر جسمی رو به بالا حرکت کند، نیروی مقاومت هوا به سمت پایین و اگر جسم رو به پایین حرکت کند، نیروی مقاومت هوا رو به بالا خواهد بود. مطابق شکل زیر داریم:



با توجه به یکسان بودن جرم جسم در هر دو حالت، طبق قانون دوم نیوتون، نسبت مقدار نیروی خالص در دو حالت همان نسبت

مقدار شتاب در دو حالت است؛ بنابراین داریم:

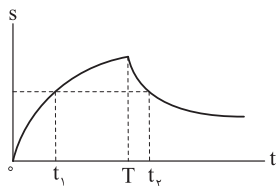
$$\frac{F_{\text{net} \uparrow}}{F_{\text{net} \downarrow}} = \frac{a_{\uparrow}}{a_{\downarrow}} \xrightarrow{a_{\uparrow} = 4a_{\downarrow}} \frac{F_{\text{net} \uparrow}}{F_{\text{net} \downarrow}} = 4$$

حال نسبت نیروی مقاومت هوا به وزن گلوله را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} F_{\text{net} \uparrow} = mg + f_D \\ F_{\text{net} \downarrow} = mg - f_D \end{cases}$$

$$\frac{F_{\text{net} \uparrow}}{F_{\text{net} \downarrow}} = 4 \Rightarrow \frac{mg + f_D}{mg - f_D} = 4 \Rightarrow 4mg - 4f_D = mg + f_D \Rightarrow 3mg = 5f_D \Rightarrow f_D = \frac{3}{5}mg$$

نمودار تندی - زمان چتربازی که در مبدأ زمان از یک بلندی رها شده و در لحظه T چتر خود را باز کرده، به شکل زیر است. اگر اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر چتر باز در دو لحظه t_1 و t_2 ، به ترتیب برابر f_1 و f_2 باشد، کدام مقایسه درست است؟ (وزن چتر باز به همراه تجهیزات او برابر W است.)



(۱) $f_1 < W < f_2$

(۲) $f_1 = f_2 < W$

(۳) $W < f_1 = f_2$

(۴) $f_2 < W < f_1$

درس Box

اگر جسمی به صورت تندشونده در حال حرکت باشد، برابند نیروهای همسو با حرکت جسم بزرگتر از برابند نیروهای خلاف جهت حرکت است ولی اگر جسمی به صورت کندشونده در حال حرکت باشد، برابند نیروهای خلاف جهت حرکت بزرگتر از برابند نیروهای همسو با حرکت است. به عنوان مثال در حرکت چتر باز به سمت پایین، اگر چتر باز تندشونده رو به پایین حرکت کند، نیروی همسوی حرکت (وزن) بزرگتر از نیروی خلاف جهت حرکت (مقاومت هوا) است و اگر کندشونده رو به پایین حرکت کند، نیروی خلاف جهت حرکت (مقاومت هوا) بزرگتر از نیروی همسوی حرکت (وزن) است؛ بنابراین طبق الگوی زیر داریم:

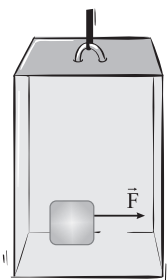
$$\begin{aligned} mg > f_D &\Leftarrow \text{تندشونده} \\ f_D > mg &\Leftarrow \text{کندشونده} \end{aligned}$$

طبق درس باکس و با توجه به این که در لحظه t_1 چتر باز به صورت تندشونده (نمودار تندی - زمان در حال دور شدن از محور زمان) حرکت می کند، در می یابیم $f_1 < W$ است. از طرفی در لحظه t_2 با توجه به این که چتر باز به صورت کندشونده (نمودار تندی - زمان در حال نزدیک شدن به محور زمان) رو به پایین حرکت می کند، در می یابیم $f_2 > W$ است؛ بنابراین داریم:

$$f_1 < W < f_2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، نیروی افقی $\vec{F}$ به جسمی که درون آسانسور قرار دارد، وارد می‌شود. آسانسور در حالت اول با شتاب رو به پایین به بزرگی 1 m/s^2 و در حالت دوم با شتاب رو به بالا به بزرگی 2 m/s^2 حرکت می‌کند. حداقل مقدار F برای به حرکت درآمدن جسم در کف آسانسور، در حالت اول چند برابر حالت دوم است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و $\mu_s \neq 0$)



همان نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه ($f_{s,max}$) است.

$$\frac{11}{8} \quad (1)$$

$$\frac{11}{12} \quad (2)$$

$$\frac{9}{8} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$



درس‌Box

برای محاسبه نیروی عمودی سطح وارد بر جسمی که بر روی کف آسانسور قرار دارد، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$F_N = m(g \pm a)$$

جهت شتاب آسانسور
مقدار شتاب آسانسور (m/s^2)
شتاب گرانش (m/s^2)
نیروی عمودی سطح کف آسانسور (N)
جهت شتاب آسانسور
جرم (kg)
رو به پایین

بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \rightarrow (N)$$

ضریب اصطکاک ایستایی
نیروی عمودی سطح (N)
بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی (N)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: نیروی عمودی سطح کف آسانسور را در دو حالت حساب می‌کنیم:

حالت اول: آسانسور با شتاب رو به پایین 1 m/s^2 حرکت می‌کند:

$$F_{N_1} = m(g - a_1) \xrightarrow{\substack{g=10 \text{ m/s}^2 \\ a_1=1 \text{ m/s}^2}} F_{N_1} = m(10 - 1) = 9m$$

حالت دوم: آسانسور با شتاب رو به بالای 2 m/s^2 حرکت می‌کند:

$$F_{N_2} = m(g + a_2) \xrightarrow{\substack{g=10 \text{ m/s}^2 \\ a_2=2 \text{ m/s}^2}} F_{N_2} = m(10 + 2) = 12m$$

گام دوم: نسبت حداقل نیروی لازم برای به حرکت درآمدن جسم ($f_{s,max}$) را در دو حالت به دست می‌آوریم:

$$F_{min} = f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{\mu_{s1} = \mu_{s2}} \frac{F_{min_1}}{F_{min_2}} = \frac{F_{N_1}}{F_{N_2}} \xrightarrow{\substack{F_{N_1}=9m \\ F_{N_2}=12m}} \frac{F_{min_1}}{F_{min_2}} = \frac{9m}{12m} = \frac{3}{4}$$

یک انتهای فنر سبکی به طول 30 cm و ثابت 510 N/m به سقف آسانسوری بسته شده و از انتهای دیگر آن جسمی به جرم 1200 g آویزان است. در حالتی که شتاب آسانسور، رو به پایین و اندازه آن برابر $1/5 \text{ m/s}^2$ است، طول فنر به چند سانتی‌متر می‌رسد؟
($g = 10 \text{ m/s}^2$)

۳۴ (۴)

۳۲ (۳)

۲۸ (۲)

۲۶ (۱)



درس‌Box

اگر جسمی از فنر متصل به سقف آسانسور، آویزان باشد، نیروی کشسانی فنر وارد بر جسم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F_e = m(g \pm a)$$

جهت شتاب شتاب گرانش
رو به بالا (m/s²)
جهت شتاب شتاب
رو به پایین (m/s²)
نیروی کشسانی فنر (N)
مقدار شتاب جهت شتاب جرم (kg)
آسانسور (m/s²)
رو به پایین

اگر طول فنری نسبت به حالت عادی به اندازه x تغییر کند، نیروی کشسانی فنر طبق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F_e = kx$$

تغییر طول (m) $F_e = kx$ نیروی کشسانی فنر (N)
ثابت فنر (N/m)

گام اول: نیروی کشسانی فنر را حساب می‌کنیم. طبق رابطه‌ای که در درس‌باکس آوردیم، می‌توانیم بنویسیم: **پاسخ خیلی تشریحی**

$$F_e = m(g - a) \quad \frac{m=1200 \text{ g}=1/2 \text{ kg}}{g=10 \text{ m/s}^2, a=1/5 \text{ m/s}^2} \rightarrow F_e = 1/2 (10 - 1/5) = 10/2 \text{ N}$$

گام دوم: تغییر طول فنر را به دست می‌آوریم:

$$F_e = kx \quad \frac{F_e=10/2 \text{ N}}{k=510 \text{ N/m}} \rightarrow 10/2 = 510 \times x \Rightarrow x = 0/02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$$

گام سوم: طول نهایی فنر را به دست می‌آوریم:

$$x = L_2 - L_1 \quad \frac{x=2 \text{ cm}}{L_1=30 \text{ cm}} \rightarrow 2 = L_2 - 30 \Rightarrow L_2 = 32 \text{ cm}$$

دو جسم مکعب شکل A و B با تندی‌های اولیه $v_A = v$ و $v_B = 2v$ تماس بر یک سطح افقی پرتاب شده و به ترتیب پس از طی مسافت‌های ℓ_A و ℓ_B متوقف می‌شوند. اگر جرم جسم B، ۳ برابر جرم جسم A و ضریب اصطکاک جنبشی جسم A، $\frac{3}{4}$ برابر ضریب اصطکاک جنبشی جسم B باشد، $\frac{\ell_A}{\ell_B}$ کدام است؟

$\frac{8}{3}$ (۴)

$\frac{3}{8}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

۶ (۱)



درس‌Box

اگر جسمی روی یک سطح افقی دارای اصطکاک پرتاب شود، مسافت توقف جسم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\ell = \frac{v_0^2}{2\mu_k g}$$

تندی اولیه v_0 (m/s) →
 شتاب گرانش g (m/s²) →
 ضریب اصطکاک جنبشی μ_k ← مسافت توقف (m)

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow -f_k = -\mu_k F_N = -\mu_k mg = ma \Rightarrow a = -\mu_k g$$

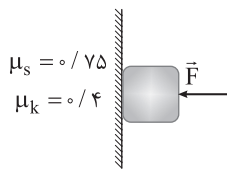
$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{a=-\mu_k g, v=0} -v_0^2 = 2(-\mu_k g)\Delta x \xrightarrow{\Delta x=\ell} v_0^2 = 2\mu_k g\ell \Rightarrow \ell = \frac{v_0^2}{2\mu_k g}$$

با توجه به رابطه بالا درمی‌یابیم که مسافت توقف جسم به جرم جسم ربطی ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ طبق رابطه $\ell = \frac{v_0^2}{2\mu_k g}$ ، نسبت $\frac{\ell_A}{\ell_B}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\ell_A}{\ell_B} = \left(\frac{v_{0A}}{v_{0B}}\right)^2 \times \frac{\mu_{kB}}{\mu_{kA}} \xrightarrow{v_{0A}=v, v_{0B}=2v, \mu_{kA}=\frac{3}{4}\mu_{kB}} \frac{\ell_A}{\ell_B} = \left(\frac{v}{2v}\right)^2 \times \frac{\mu_{kB}}{\frac{3}{4}\mu_{kB}} \Rightarrow \frac{\ell_A}{\ell_B} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

در شکل زیر، وزن جسم 10 N و اندازه نیروی افقی $\vec{F}$ برابر 24 N است. اندازه نیرویی که جسم به دیوار قائم وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ (جسم در ابتدا ساکن است.)



$$\mu_s = 0.75$$

$$\mu_k = 0.4$$

$$26 \text{ (۱)}$$

$$24 \text{ (۳)}$$

Hint

اول نیروی عمودی سطح وارد بر جسم رو حساب کن. بعدش نیروی $f_{s,max}$ رو به دست بیار و با مقایسه نیروی محرک (یعنی در این جا وزن) با $f_{s,max}$ ببین جسم ساکن می‌مونه یا حرکت می‌کنه. بعدش نیروی اصطکاک رو حساب کن. در نهایت با داشتن نیروی اصطکاک و F_N نیروی جسم به سطح دیوار رو به دست بیار.

درس Box

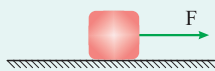
بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی که سطح بر جسم وارد می‌کند، از رابطه زیر به دست می‌آید:

ضریب اصطکاک ایستایی

$$f_{s,max} = \mu_s F_N$$

نیروی عمودی سطح N بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی (N)

اگر به جسمی ساکن نیرویی وارد شود که جسم را تحریک به حرکت کند، مطابق شکل زیر، دو حالت داریم:



(۱) اگر $F \leq f_{s,max}$ باشد، جسم همچنان ساکن می‌ماند؛ بنابراین اصطکاک از نوع ایستایی بوده و مقدار آن برابر است با:

$$f_s = F$$

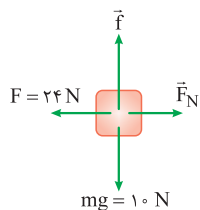
(۲) اگر $F > f_{s,max}$ باشد، جسم حرکت می‌کند؛ بنابراین اصطکاک از نوع جنبشی بوده و مقدار آن برابر است با:

ضریب اصطکاک جنبشی

$$f_k = \mu_k F_N$$

نیروی عمودی سطح (N) نیروی اصطکاک جنبشی (N)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و مقدار نیروی عمودی سطح را به دست می‌آوریم:



$$F_N = F = 24\text{ N}$$

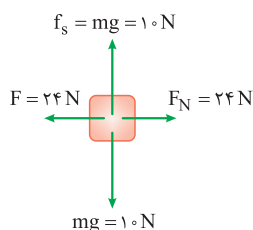
گام دوم: نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را حساب می‌کنیم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s = 0.75, F_N = 24\text{ N}} f_{s,max} = 0.75 \times 24 = 18\text{ N}$$

گام سوم: باید تعیین کنیم جسم ساکن است یا حرکت می‌کند. با توجه به این که نیروی محرک که در این جا نیروی وزن ($mg = 10\text{ N}$) است، کوچک‌تر از نیروی $f_{s,max}$ است، در می‌یابیم جسم همچنان ساکن می‌ماند.

گام چهارم: نیروی اصطکاک وارد بر جسم را حساب می‌کنیم. با توجه به این که جسم ساکن

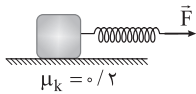
است، داریم:



$$F_s = mg = 10\text{ N}$$

گام پنجم: نیروی جسم بر دیوار را که طبق قانون سوم نیوتون مقدار آن با مقدار نیروی دیوار بر جسم برابر است، به دست می‌آوریم:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} \xrightarrow{F_N = 24\text{ N}, f_s = 10\text{ N}} R = \sqrt{24^2 + 10^2} = 2\sqrt{12^2 + 5^2} = 2 \times 13 = 26\text{ N}$$



جسمی به جرم 5 kg از انتهای فنر سبک و قائمی آویزان است و در حالت تعادل، تغییر طول فنر نسبت به حالت عادی آن 12 cm است. اگر مطابق شکل مقابل، این جسم را توسط همین فنر، روی یک سطح افقی، با شتاب 3 m/s^2 به حرکت در آوریم، طول فنر نسبت به حالت عادی چند سانتی‌متر افزایش می‌یابد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

$$F_e = mg$$

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

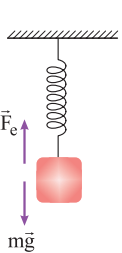
۲ (۱)



Hint

با توجه به تعادل جسم، نیروی کشسانی فنر رو به دست بیار و با داشتن نیروی کشسانی و تغییر طول فنر، ثابت فنر رو حساب کن. بعدش نیروی اصطکاک جنبشی و نیروی خالص را در حالت دوم حساب کن و پس از آن نیروی کشسانی فنر را در حالت جدید به دست بیار. در نهایت با داشتن نیروی کشسانی فنر و ثابت فنر، تغییر طول فنر رو حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی



$$F_e = mg = 50 \text{ N} \text{ تعادل}$$

گام دوم: ثابت فنر را حساب می‌کنیم:

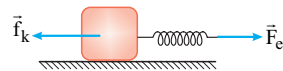
$$F_e = kx \xrightarrow{x=12 \text{ cm}, F_e=50 \text{ N}} 50 = k \times 12 \Rightarrow k = \frac{50}{12} = \frac{25}{6} \text{ N/cm}$$

گام سوم: نیروی اصطکاک و نیروی خالص را در حالت دوم حساب می‌کنیم:

$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow{F_N=mg} f_k = \mu_k mg \xrightarrow{\mu_k=0.2, mg=50 \text{ N}} f_k = 0.2 \times 50 = 10 \text{ N}$$

$$F_{\text{net}} = ma \xrightarrow{a=3 \text{ m/s}^2, m=5 \text{ kg}} F_{\text{net}} = 5 \times 3 = 15 \text{ N}$$

گام چهارم: با داشتن F_{net} و f_k ، نیروی کشسانی فنر را در حالت دوم حساب می‌کنیم:

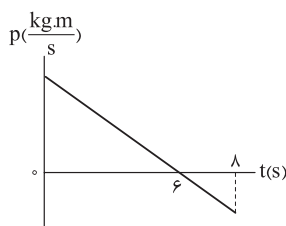


$$F_{\text{net}} = F_e - f_k \xrightarrow{F_{\text{net}}=15 \text{ N}, f_k=10 \text{ N}} 15 = F_e - 10 \Rightarrow F_e = 25 \text{ N}$$

گام پنجم: تغییر طول فنر را در حالت دوم حساب می‌کنیم:

$$F_e = kx \xrightarrow{k=\frac{25}{6} \text{ N/cm}, F_e=25 \text{ N}} 25 = \frac{25}{6} \times x \Rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

نمودار تکانه - زمان جسمی به جرم 500 g ، به شکل زیر است. اگر در 8 ثانیه اول، انرژی جنبشی جسم 32 J تغییر کند، بزرگی نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در این مدت چند نیوتون است؟



۱ (۱)

۱/۵ (۲)

۲ (۳)

۴ (۴)

درس Box

شیب خط واصل دو نقطه از نمودار تکانه - زمان برابر است با نیروی خالص متوسط در آن بازه زمانی و داریم:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

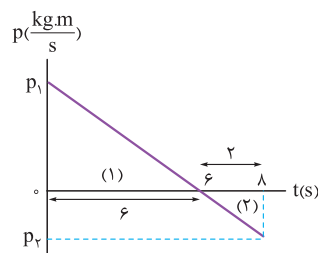
اگر جسمی به جرم m دارای تکانه p باشد، انرژی جنبشی جسم از رابطه زیر به دست می آید:

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

$\left(\frac{\text{kg.m}}{\text{s}}\right)$ تکانه
 $\uparrow$
 $\left(\text{J}\right) \leftarrow K = \frac{p^2}{2m}$
 $\downarrow$
 (kg) جرم

گام اول: نسبت تکانه جسم در دو لحظه $t_1 = 0$ و $t_2 = 8 \text{ s}$ را با توجه به نمودار $p-t$ زیر و از تشابه دو مثلث به دست می آوریم:

$$\frac{|p_2|}{p_1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \xrightarrow{p_2 < 0} p_2 = -\frac{1}{3} p_1$$



گام دوم: مقادیر p_1 و p_2 را طبق رابطه $K = \frac{p^2}{2m}$ به دست می آوریم:

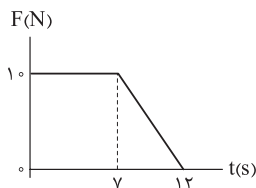
$$K_2 - K_1 = \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2m} \xrightarrow[p_2 = -\frac{1}{3}p_1, m = 500 \text{ g} = 0.5 \text{ kg}]{K_2 - K_1 = -32 \text{ J}} -32 = \frac{\frac{1}{9}p_1^2 - p_1^2}{2 \times 0.5}$$

$$\Rightarrow -32 = -\frac{8}{9}p_1^2 \Rightarrow p_1^2 = 36 \Rightarrow p_1 = 6 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}, p_2 = -\frac{1}{3}p_1 = -\frac{1}{3} \times 6 = -2 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

گام سوم: نیروی خالص متوسط در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 8 \text{ s}$ را حساب می کنیم:

$$F_{net_{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta p = p_2 - p_1 = -2 - 6 = -8 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}}{\Delta t = 8 \text{ s}} \rightarrow F_{net_{av}} = -1 \text{ N} \Rightarrow |F_{net_{av}}| = 1 \text{ N}$$

نمودار نیروی خالص وارد بر جسی به جرم 6 kg که در راستای محور x حرکت می‌کند، برحسب زمان، به شکل زیر است. اگر تکانه جسم در لحظه $t = 10 \text{ s}$ برابر $(145 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}})\vec{i}$ باشد، سرعت اولیه جسم چند متر بر ثانیه است؟



(۱) $-9\vec{i}$

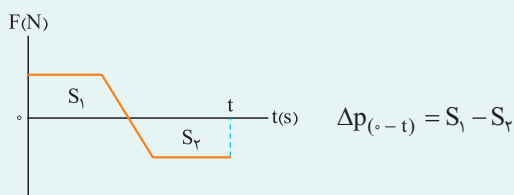
(۲) $-8\vec{i}$

(۳) $8\vec{i}$

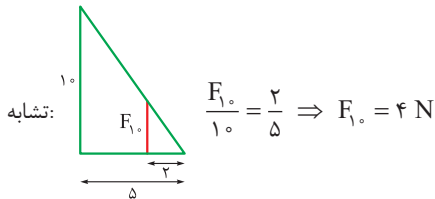
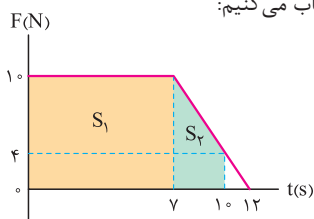
(۴) $9\vec{i}$



مساحت محصور به نمودار نیروی خالص برحسب زمان برابر است با تغییر تکانه جسم در آن بازه زمانی. مطابق شکل زیر داریم:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به نمودار $F-t$ ، تغییر تکانه در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 10 \text{ s}$ را حساب می‌کنیم:



$S_1 = 7 \times 10 = 70$

$S_2 = \frac{(10 + 4) \times 3}{2} = 21$

$\Delta p_{(0-10)} = S_1 + S_2 = 70 + 21 = 91 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$

گام دوم: تکانه جسم در لحظه $t_1 = 0$ را حساب می‌کنیم.

$\Delta p = p_2 - p_1 \xrightarrow[p_2 = 145 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}]{\Delta p = 91 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}} 91 = 145 - p_1 \Rightarrow p_1 = 145 - 91 = 54 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$

گام سوم: سرعت اولیه جسم را حساب می‌کنیم:

$\vec{p}_1 = m \cdot \vec{v} \xrightarrow[m = 6 \text{ kg}]{\vec{p}_1 = 54 (\frac{\text{kg.m}}{\text{s}})\vec{i}} 54\vec{i} = 6 \times \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = 9 \text{ m/s} \vec{i}$

وزن ماهواره‌ای به جرم 75 kg در ارتفاع چند کیلومتری از سطح زمین برابر 480 N است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$) و شعاع کره زمین

6400 km است.

۱۶۰۰ (۲)

۸۰۰ (۱)

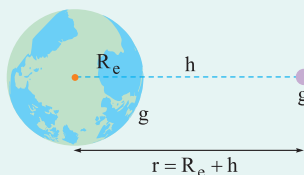
۳۲۰۰ (۴)

۲۴۰۰ (۳)

مشاوره این تیپ سؤال، در کنکورهای اخیر به شکل‌های متنوعی مطرح شده که آخرین نمونه آن در کنکور سراسری تجربی ۱۴۰۳ نوبت دوم است.

درسی Box

هر چه یک جسم، از کره زمین دورتر شود، جرم آن ثابت می‌ماند؛ اما وزن آن کاهش می‌یابد، زیرا شتاب گرانش در اطراف کره زمین، با مربع فاصله از مرکز زمین نسبت وارون دارد.



$$\frac{W'}{W} = \frac{mg'}{mg} = \left(\frac{R_e}{r}\right)^2$$

R_e : شعاع زمین = 6400 km

g : شتاب گرانش در سطح زمین (m/s^2)

g' : شتاب گرانش در ارتفاع h از سطح زمین یا به فاصله r از مرکز زمین (m/s^2)

W : وزن جسمی به جرم m روی سطح زمین (N)

W' : وزن جسم در فاصله h از سطح زمین (N)

وزن ماهواره در سطح زمین و همچنین در ارتفاع h از سطح زمین معلوم است. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{W'}{W} = \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \xrightarrow{W'=480 \text{ N}, W=mg=75 \times 10 = 750 \text{ N}} \frac{480}{750} = \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{25} = \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{R_e}{r}$$

$$\xrightarrow{\frac{R_e=6400 \text{ km}}{r=R_e+h}} \frac{4}{5} = \frac{6400}{6400+h} \Rightarrow 5 \times 6400 = 4 \times 6400 + 4h \Rightarrow 6400 = 4h \Rightarrow h = 1600 \text{ km}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مسیر حرکت یک سورتمه در سطحی افقی به شکل زیر و تندی سورتمه در تمام مسیر 30 m/s است. اگر اندازه شتاب مرکزگرای

سورتمه در پیچ‌های (۱) و (۲) به ترتیب a_1 و a_2 باشد، $a_2 - a_1$ بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ r_1 و r_2 به ترتیب شعاع پیچ (۱)

و پیچ (۲) هستند.

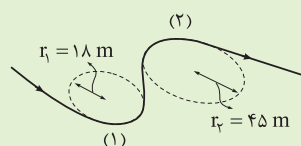
۲۷ (۱)

-۲۷ (۲)

۳۰ (۳)

-۳۰ (۴)

مشاوره این سؤال، یکی از تمرین‌های فصل ۲ کتاب درسی فیزیک (۳) رشته ریاضی است که با تغییر اندکی در اعداد آن، در این‌جا مطرح شده است. تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.



در حرکت دایره‌ای یکنواخت، با آن که اندازه سرعت (تندی) ثابت است، اما جهت آن که همواره بر مسیر حرکت دایره‌ای مماس است تغییر می‌کند و حرکتی شتابدار محسوب می‌شود. این شتاب به طرف مرکز دایره است و آن را شتاب مرکزگرا می‌نامند:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

a : اندازه شتاب مرکزگرا (m/s^2)

v : تندی متحرک (m/s)

r : شعاع مسیر (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** به کمک رابطه شتاب مرکزگرا در حرکت دایره‌ای یکنواخت، a_1 و a_2 را به دست می‌آوریم:

$$a_1 = \frac{v_1^2}{r_1} \quad \frac{v_1 = 30 \text{ m/s}}{r_1 = 18 \text{ m}} \rightarrow a_1 = \frac{30^2}{18} = \frac{900}{18} = 50 \text{ m/s}^2$$

$$a_2 = \frac{v_2^2}{r_2} \quad \frac{v_2 = 30 \text{ m/s}}{r_2 = 45 \text{ m}} \rightarrow a_2 = \frac{30^2}{45} = \frac{900}{45} = 20 \text{ m/s}^2$$

گام دوم: اکنون می‌توانیم حاصل $a_2 - a_1$ را به دست آوریم:

$$a_2 - a_1 = 20 - 50 = -30 \text{ m/s}^2$$



درس‌Box

دو متحرک A و B روی محیط دایره‌ای با تندی ثابت حرکت می‌کنند. اگر جرم جسم A، ۲ برابر جرم جسم B و اندازه نیروی مرکز گرای وارد بر جسم A، نصف اندازه نیروی مرکز گرای وارد بر جسم B باشد، به ترتیب دوره تناوب جسم A چند برابر دوره تناوب جسم B و انرژی جنبشی جسم A چند برابر انرژی جنبشی جسم B است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) \quad \frac{1}{4} \text{ و } \frac{1}{2} & (۲) \quad \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{4} \\ (۳) \quad ۲ \text{ و } ۱ & (۴) \quad \frac{2}{3} \text{ و } \frac{1}{3} \end{array}$$



Hint ابتدا رابطه‌ای بین نیروی مرکزگرا با جرم و دوره حرکت آن به دست آورید. سپس رابطه‌ای بین انرژی جنبشی با جرم و دوره حرکت پیدا کنید. در نهایت به کمک روابط به دست آمده، نسبت‌های خواسته شده را محاسبه کنید.

درس Box

(۱) در حرکت دایره‌ای یکنواخت، یک نیروی خالص رو به مرکز، سبب ایجاد شتاب مرکزگرا می‌شود. این نیروی مرکزگرا از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

F: نیروی مرکزگرا (N)

m: جرم جسم (kg)

v: تندی جسم (m/s)

r: شعاع مسیر (m)

(۲) در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره را دوره تناوب می‌نامیم و یکای آن ثانیه است.

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

v: تندی حرکت جسم (m/s)

r: شعاع مسیر (m)

T: دوره تناوب (s)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: رابطه‌ای بین نیروی مرکزگرا با جرم و دوره حرکت به دست می‌آوریم:

$$F = m \frac{v^2}{r} \xrightarrow{v = \frac{2\pi r}{T}} F = m \left(\frac{4\pi^2 r}{T^2} \right) \times \frac{1}{r} \Rightarrow F = \frac{m 4\pi^2 r}{T^2}$$

با توجه به این که هر دو متحرک، روی محیط یک دایره می‌چرخند، پس شعاع چرخش آن‌ها یکسان است و می‌توان نوشت:

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^2 \xrightarrow{\frac{m_A = 2m_B}{F_A = \frac{1}{2}F_B}} \frac{F_B}{\frac{1}{2}F_B} = \frac{m_B}{2m_B} \times \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^2 = 4$$

(رد گزینه‌های (۱) و (۲)) $\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = 2$

گام دوم: رابطه‌ای بین انرژی جنبشی با جرم و دوره حرکت پیدا می‌کنیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{v = \frac{2\pi r}{T}} K = \frac{1}{2}m \times \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

با توجه به یکسان بودن شعاع چرخش دو متحرک داریم:

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^2 \xrightarrow{\frac{m_A = 2m_B}{\frac{T_B}{T_A} = \frac{1}{2}}} \frac{K_A}{K_B} = \frac{2m_B}{m_B} \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

فاصله ماهواره A از سطح زمین به اندازه نصف شعاع زمین و فاصله ماهواره B از سطح زمین ۵ برابر شعاع زمین است. دوره گردش ماهواره A چند برابر دوره گردش ماهواره B است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$
(۲) ۸
(۳) $\frac{1}{4}$
(۴) ۴

مشاوره مشابه این سؤال قبلاً در کنکور سراسری تجربی ۹۱ مطرح شده است. توجه داشته باشید که در آن زمان، مبحث حرکت دایره‌ای و محاسبه دوره حرکت ماهواره‌ها در کتاب‌های رشته تجربی نیز وجود داشته است.

درس Box

اگر یک ماهواره روی مدار تقریباً دایره‌شکل به شعاع r به دور زمین بچرخد و دوره حرکت آن T باشد، می‌توان نوشت:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_e}} \Rightarrow T^2 \propto r^3$$

یعنی مربع دوره گردش ماهواره، با توان سوم شعاع چرخش آن متناسب است؛ بنابراین برای دو ماهواره A و B که به دور زمین می‌چرخند داریم:

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3$$

T_A : دوره گردش ماهواره A

T_B : دوره گردش ماهواره B

r_A : شعاع گردش ماهواره A

r_B : شعاع گردش ماهواره B

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 \xrightarrow{r_A = R_e + h_A = R_e + \frac{R_e}{2} = \frac{3}{2}R_e, r_B = R_e + h_B = R_e + 5R_e = 6R_e} \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{2}R_e}{6R_e}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{1}{8}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۸ اگر جرم نوسانگر یک سامانه جرم - فنر، ۳۶ درصد کاهش یابد، بسامد نوسان‌های آن چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) ۲۰، کاهش می‌یابد.

(۲) ۲۰، افزایش می‌یابد.

(۳) ۲۵، کاهش می‌یابد.

(۴) ۲۵، افزایش می‌یابد.

مشاوره تحلیل سؤال‌های کنکور چند سال اخیر، نشان می‌دهد که حدود $\frac{1}{3}$ این سؤال‌ها در حد ساده هستند و با راه‌حل‌های معمولی، به راحتی به جواب می‌رسند.



وقتی یک سامانه جرم - فنر، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، بسامد نوسان‌های آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

f: بسامد (Hz)

k: ثابت فنر (N/m)

m: جرم (kg)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در این جا فقط جرم نوسانگر تغییر کرده و ثابت فنر در دو حالت مطرح‌شده، یکسان است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

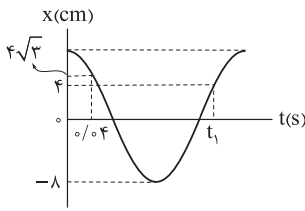
$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \xrightarrow{m_2 = m_1 - 0.36m_1 = 0.64m_1} \frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{m_1}{0.64m_1}} \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{100}{64}} = \frac{10}{8} = 1.25$$

اکنون می‌توانیم درصد تغییر بسامد نوسانگر را به دست آوریم:

$$\frac{\Delta f}{f_1} \times 100 = \frac{1.25f_1 - f_1}{f_1} \times 100 = \frac{0.25f_1}{f_1} \times 100 = 25\%$$

چون درصد به دست آمده مثبت است، پس بسامد نوسان‌ها افزایش یافته است.

نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که در راستای محور x نوسان می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط این نوسانگر در بازه زمانی صفر تا t_1 چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟



۱۰ (۱)

۵۰ (۲)

۷۰ (۳)

۸۵ (۴)



Hint

دوره نوسان را حساب کنید و به کمک آن، لحظه t_1 را به دست آورید. سپس با محاسبه مسافت طی شده، تندی متوسط در بازه زمانی صفر تا t_1 را پیدا کنید.

درتس Box

(۱) اگر نوسانگر در لحظه $t = 0$ در مکان $x = +A$ باشد، معادله مکان - زمان آن در حرکت هماهنگ ساده به صورت زیر است:

$$x = A \cos \omega t$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

x : مکان نوسانگر (m)

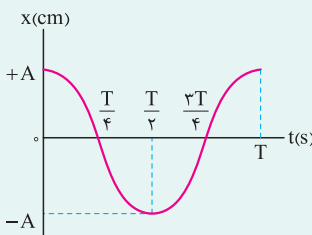
A : دامنه (m)

ω : بسامد زاویه‌ای (rad/s)

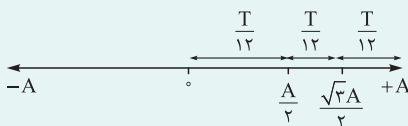
t : زمان (s)

T : دوره نوسان (s)

(۲) نمودار مکان - زمان در حرکت هماهنگ ساده:



(۳) وقتی نوسانگر روی محور حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، داریم:



(۴) رابطه تندی متوسط به صورت زیر است:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

s_{av} : تندی متوسط (m/s)

ℓ : مسافت طی شده (m)

Δt : بازه زمانی (s)

گام اول: با توجه به نمودار داده شده، دامنه نوسان 8 cm است و نوسانگر در لحظه $t = 0.04 \text{ s}$ از مکان $x = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ می‌گذرد. با استفاده از معادله مکان - زمان در حرکت هماهنگ ساده، دوره حرکت را حساب می‌کنیم:

$$x = A \cos \omega t \xrightarrow[A=8 \text{ cm}]{x=4\sqrt{3} \text{ cm}, t=0.04 \text{ s}} 4\sqrt{3} = 8 \cos \omega \times 0.04$$

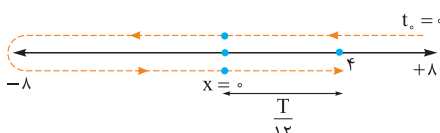
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \omega \times \frac{4}{100} \xrightarrow[\omega=\frac{2\pi}{T}]{\omega=\frac{2\pi}{T}} \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{T} \times \frac{4}{100} \Rightarrow T = 0.48 \text{ s}$$

توجه: به کمک قسمت سوم درس باکس نیز می‌توانستیم مستقیماً دوره حرکت را به دست آوریم:

$$x = 4\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} A \Rightarrow 0.04 = \frac{T}{12} \Rightarrow T = 0.48 \text{ s}$$

گام دوم: با توجه به شکل زیر، وقتی نوسانگر برای دومین بار از مکان $x = 4 \text{ cm}$ می‌گذرد، زمان سپری شده برابر است با:

$$t_1 = 3 \times \frac{T}{4} + \frac{T}{12} \xrightarrow{T=0.48 \text{ s}} t_1 = 3 \times 0.12 + 0.04 = 0.4 \text{ s}$$



گام سوم: مسافت طی شده توسط نوسانگر از لحظه $t = 0$ تا لحظه $t_1 = 0.4 \text{ s}$ را حساب می‌کنیم:

$$\ell = 8 + 8 + 8 + 4 = 28 \text{ cm}$$

اکنون می‌توانیم تندی متوسط در بازه زمانی 0 تا t_1 را پیدا کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\ell=28 \text{ cm}, \Delta t=0.4 \text{ s}} s_{av} = \frac{28}{0.4} = 70 \text{ cm/s}$$

۷۰

در شکل زیر، نوسانگری به جرم 100 g روی پاره خط AB حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر نوسانگر در هر دقیقه 300 مرتبه طول پاره خط AB را طی کند، نیروی خالص وارد بر آن در نقطه M بر حسب نیوتون کدام است؟ ($\pi^2 = 10$)



(۱) $0.25 \vec{i}$

(۲) $-0.25 \vec{i}$

(۳) $\vec{i}$

(۴) $-\vec{i}$



Hint

درس Box

دوره حرکت و بسامد زاویه‌ای را به دست آورید. سپس اندازه و جهت نیروی خالص وارد بر نوسانگر را در مکان $x = 1 \text{ cm}$ تعیین کنید.

$$T = \frac{\Delta t}{N}$$

(۱) در هر نوسان کامل، نوسانگر دو بار طول پاره خط نوسان را طی می‌کند.

(۲) دوره نوسان با توجه به تعداد نوسان‌ها از رابطه مقابل به دست می‌آید:

T : دوره (s)

Δt : بازه زمانی نوسان‌ها (s)

N : تعداد نوسان‌ها در مدت Δt

(۳) نیروی خالص وارد بر نوسانگر، همواره به طرف مرکز نوسان (نقطه تعادل) است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F} = -(m\omega^2 x)\vec{i}$$

F : نیرو (N)

m : جرم (kg)

ω : بسامد زاویه‌ای (rad/s)

x : مکان نوسانگر (m)

گام اول: وقتی نوسانگر 300 بار طول پاره خط AB را طی می‌کند، یعنی 150 نوسان کامل انجام داده است. با توجه به این موضوع،

دوره نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$T = \frac{\Delta t}{N} \xrightarrow[\Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}]{N = 150} T = \frac{60}{150} = 0.4 \text{ s}$$

بسامد زاویه‌ای نیز به دست می‌آید:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T = 0.4 \text{ s}} \omega = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \text{ rad/s}$$

گام دوم: اکنون می‌توانیم نیروی وارد بر نوسانگر را در نقطه M به دست آوریم:

$$\vec{F} = -(m\omega^2 x)\vec{i} \xrightarrow[m = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}, \omega = 5\pi \text{ rad/s}]{x = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}} \vec{F} = -(0.1 \times 25\pi^2 \times 0.01)\vec{i}$$

$$\xrightarrow{\pi^2 = 10} \vec{F} = -(2.5 \times 10 \times 0.01)\vec{i} = (-0.25 \text{ N})\vec{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

معادله مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = 0.1 \cos(10\pi t)$ است. در لحظه t_1 نوسانگر به صورت کندشونده

از مکان $x_1 = 2 \text{ cm}$ عبور می‌کند. چند ثانیه بعد از لحظه t_1 شتاب نوسانگر برای اولین بار برابر $\vec{a} = (20 \text{ m/s}^2) \vec{i}$ می‌شود؟ ($\pi^2 = 10$)

۰/۴ (۴)

۰/۰۵ (۳)

۰/۲ (۲)

۰/۱ (۱)



Hint ابتدا دوره نوسان را به دست آورید. سپس در لحظه t_1 مکانی را که شتاب نوسانگر در آن جا $\vec{a} = (20 \text{ m/s}^2) \vec{i}$ می‌شود، پیدا کنید. در پایان نیز فاصله زمانی t_1 تا t_2 را حساب کنید.

دروس Box

۱) نوسانگر در هر نصف دوره ($\frac{1}{2}T$) مسافتی به اندازه ۲ برابر دامنه ($2A$) را می‌پیماید.
۲) وقتی نوسانگر به طرف نقاط بازگشتی می‌رود، حرکت آن کندشونده و وقتی به طرف نقطه تعادل می‌رود، حرکت آن تندشونده است.
۳) شتاب نوسانگر برحسب مکان آن، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a} = -(\omega^2 x) \vec{i}$$

a : اندازه شتاب (m/s^2)

ω : بسامد زاویه‌ای (rad/s)

x : مکان نوسانگر (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** به کمک معادله مکان داده شده، دامنه و دوره حرکت را حساب می‌کنیم:

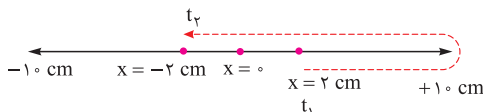
$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t) \\ x = 0.1 \cos(10\pi t) \end{cases} \Rightarrow A = 0.1 \text{ m} = 10 \text{ cm}, \quad \omega = 10\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{\omega=10\pi \text{ rad/s}} 10\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 0.2 \text{ s}$$

گام دوم: با استفاده از معادله شتاب نوسانگر برحسب مکان، می‌توانیم مکانی را که در آن برای اولین بار، شتاب نوسانگر به $\vec{a} = (20 \text{ m/s}^2) \vec{i}$ می‌رسد، تعیین کنیم:

$$\vec{a} = -(\omega^2 x) \vec{i} \xrightarrow{\vec{a}=(20 \text{ m/s}^2) \vec{i}, \omega^2=(10\pi)^2=100\pi^2=1000 \text{ rad/s}^2} 20 \vec{i} = -1000 x \vec{i} \Rightarrow x = -2 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow x = -2 \text{ cm}$$

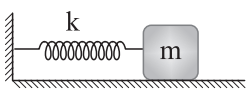
گام سوم: با توجه به شکل زیر، در بازه زمانی t_1 تا t_2 نوسانگر نصف کل نوسان یعنی مسافتی به اندازه دو برابر دامنه را پیموده است:



بنابراین زمان سپری شده برابر است با:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{0.2}{2} = 0.1 \text{ s}$$

در شکل زیر، بیشینه و کمینه طول فنر در حین نوسان جسم متصل به آن روی سطح افقی بدون اصطکاک، به ترتیب 32 cm و 24 cm است. اگر در لحظه‌ای که طول فنر به 28 cm می‌رسد، انرژی جنبشی جسم 200 mJ باشد، ثابت فنر چند نیوتون بر متر است؟



(۲) 250

(۱) 500



(۴) 25

(۳) 50

Hint

دامنه نوسان را به دست آورید و تشخیص دهید زمانی که انرژی جنبشی نوسانگر 200 mJ است در حال عبور از نقطه تعادل خود است. سپس این انرژی را با انرژی مکانیکی نوسانگر برابر قرار داده و ثابت فنر را حساب کنید.

درستی Box

- (۱) در حرکت هماهنگ ساده سامانه جرم - فنر، فاصله بین بیشینه و کمینه طول فنر، همان طول پاره خط نوسانی یا دو برابر دامنه است.
- (۲) هنگام عبور نوسانگر از نقطه تعادل خود، انرژی جنبشی آن بیشینه بوده و با انرژی مکانیکی برابر است.
- (۳) انرژی مکانیکی (کل) یک نوسانگر، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

E : انرژی مکانیکی (J)

k : ثابت فنر (N / m)

A : دامنه (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** طول پاره خط نوسان و دامنه حرکت را به دست می‌آوریم:

$$L_{\max} - L_{\min} = 2A \Rightarrow 32 - 24 = 2A \Rightarrow A = 4 \text{ cm}$$

از طرفی وقتی طول فنر 28 cm است یعنی در وسط بین دو انتهای مسیر نوسانی یا همان نقطه تعادل است. در این مکان نوسانگر بیشترین تندی و بیشترین انرژی جنبشی را دارد:

$$K_{\max} = 200 \text{ mJ}$$

گام دوم: بیشینه انرژی جنبشی با انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است؛ بنابراین داریم:

$$E = K_{\max} \xrightarrow{K_{\max} = 200 \text{ mJ}} E = 200 \text{ mJ}$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \xrightarrow[A = 4 \text{ cm} = 4 \times 10^{-2} \text{ m}]{E = 200 \text{ mJ} = 200 \times 10^{-3} \text{ J}} 200 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} k (4 \times 10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow 4 \times 10^{-1} = k \times 16 \times 10^{-4} \Rightarrow k = \frac{4000}{16} = 250 \text{ N / m}$$

انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای $\frac{1}{2} \text{ J}$ و اندازه بیشینه نیروی خالص وارد بر آن 5 N است. مسافتی که نوسانگر در هر دوره تناوب طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟

۳۲ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)



درس‌Box

(۱) در یک حرکت هماهنگ ساده، مسافت طی‌شده، ۴ برابر دامنه است.

(۲) نیروی وارد بر نوسانگر در دو انتهای پاره‌خط نوسانی، بیشینه است و اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F_{\max} = kA$$

$F_{\max}$: اندازه نیروی بیشینه وارد بر نوسانگر (N)

k : ثابت فنر (N / m)

A : دامنه نوسان (m)

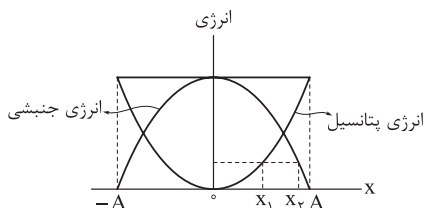
پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: انرژی مکانیکی نوسانگر را بر حسب بیشینه نیروی خالص وارد بر آن می‌نویسیم و به کمک آن، دامنه حرکت را به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \xrightarrow{F_{\max} = kA} E = \frac{1}{2} (kA) A = \frac{1}{2} (F_{\max}) A \xrightarrow{\frac{E = \frac{1}{2} \text{ J}}{F_{\max} = 5 \text{ N}}} \frac{1}{2} \times 5 A \Rightarrow A = \frac{2}{5} = 0.4 \text{ m} = 4 \text{ cm}$$

گام دوم: مسافتی که نوسانگر در هر دوره تناوب طی می‌کند، ۴ برابر دامنه است:

$$\ell = 4A \xrightarrow{A = 4 \text{ cm}} \ell = 4 \times 4 = 16 \text{ cm}$$

نمودار انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده‌ای بر حسب مکان آن به شکل زیر است. اگر تندی نوسانگر در مکان‌های x_1 و x_2 به ترتیب $1/2 \text{ m/s}$ و $0/5 \text{ m/s}$ باشد، تندی نوسانگر در مبدأ مکان چند متر بر ثانیه است؟



(۱) $1/3$

(۲) $1/5$

(۳) $1/7$

(۴) $1/9$

مشاوره این تیپ سؤال که نمودارهای انرژی جنبشی و پتانسیل، در حرکت هماهنگ ساده روی یک دستگاه مختصات رسم می‌شوند در کتاب درسی هم مطرح شده است. نمونه این نوع سؤال در کنکور تجربی ۹۹ و کنکور ریاضی ۹۸ دیده می‌شود.

درس‌Box

انرژی مکانیکی (کل) یک نوسانگر، مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل آن است.

$$E = K + U$$

E: انرژی مکانیکی (J)

K: انرژی جنبشی (J)

U: انرژی پتانسیل (J)

گام اول: اگر انرژی‌های جنبشی و پتانسیل در مکان x_1 را با K_1 و U_1 و انرژی‌های جنبشی و پتانسیل در مکان x_2 را با K_2 و U_2 نشان دهیم، با توجه به نمودار داده‌شده می‌توان نوشت:

$$K_1 = U_2, \quad U_1 = K_2$$

گام دوم: رابطه انرژی مکانیکی نوسانگر را در مکان x_1 می‌نویسیم:

$$E = K_1 + U_1 \xrightarrow{U_1 = K_2} E = K_1 + K_2 \xrightarrow{K = \frac{1}{2}mv^2} \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_{\max}^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$\frac{v_1 = 1/2 \text{ m/s}}{v_2 = 0/5 \text{ m/s}} \rightarrow v_{\max}^2 = (1/2)^2 + (0/5)^2 = 1/4 + 0/25 = 1/69 \Rightarrow v_{\max} = 1/3 \text{ m/s}$$

تندی نوسانگر در مبدأ مکان، همان تندی بیشینه است.

پاسخ خیلی تشریحی

اختلاف طول دو آونگ ساده A و B برابر ۴۵ cm است. اگر در مدتی که آونگ A، ۵ نوسان انجام می‌دهد، تعداد نوسان‌های آونگ B برابر ۴ باشد، طول آونگ A برابر چند سانتی‌متر است؟

۸۰ (۱)

۱۸۰ (۲)

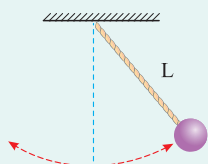
۱۲۵ (۳)

۲۲۵ (۴)

مشاوره سؤال‌هایی که در سال‌های اخیر از آونگ ساده در کنکور مطرح شده‌اند، همگی به این شکل هستند که نوسانات آونگ در دو حالت مختلف و با دو طول متفاوت مقایسه شده و تعداد نوسانات نیز در این دو حالت، دخالت دارند.

درس‌Box

دوره نوسان‌های یک آونگ ساده، از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

T: دوره (s)

L: طول آونگ (m)

g: شتاب گرانش زمین (m/s^2)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا نسبت دوره آونگ‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{t}{N} \xrightarrow{t_A = t_B} \frac{T_A}{T_B} = \frac{N_B}{N_A} \xrightarrow{\frac{N_B}{N_A} = \frac{4}{5}} \frac{T_A}{T_B} = \frac{4}{5}$$

گام دوم: با توجه به رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ نسبت دوره‌های دو آونگ A و B را برحسب طول آن‌ها می‌نویسیم:

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \Rightarrow \frac{4}{5} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \frac{16}{25}$$

بنابراین $L_A < L_B$ بوده و می‌توان نوشت:

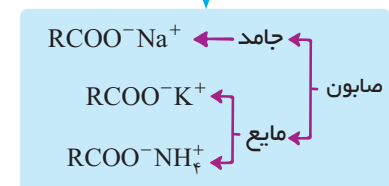
$$L_B - L_A = 45 \text{ cm}$$

اکنون می‌توانیم طول آونگ A را حساب کنیم:

$$L_B - L_A = 45 \xrightarrow{L_B = \frac{25}{16}L_A} \frac{25}{16}L_A - L_A = 45 \Rightarrow \frac{9}{16}L_A = 45 \Rightarrow L_A = 45 \times \frac{16}{9} = 80 \text{ cm}$$

کدام موارد زیر، نادرست است؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16, Na = 23, K = 39: g.mol^{-1}$)

- (الف) نقطه ذوب صابون حاصل از واکنش روغن زیتون و سود سوزآور، پایین تر از $25^{\circ}C$ است.
- (ب) تفاوت جرم مولی روغن زیتون و چربی کوهان شتر، ۳ برابر تفاوت جرم مولی آورده و اتیلن گلیکول است.
- (پ) تفاوت شمار جفت الکترون های ناپیوندی در یک پاک کننده صابونی و یک پاک کننده غیر صابونی، برابر ۵ است.
- (ت) حالت فیزیکی صابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده و جرم مولی ۲۸۷ گرم بر مول، به یقین به صورت مایع است.



(۱) الف - پ

(۲) الف - ت

(۳) ب - ت

(۴) ب - پ

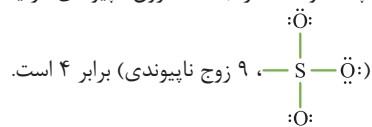
پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارتهای (الف) و (پ) نادرست اند.

بررسی عبارتها:

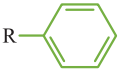
(الف) صابون های حاصل از هر دو نوع چربی در واکنش با سود سوزآور، دارای حالت فیزیکی جامد هستند؛ پس دمای ذوب آنها بالاتر از $25^{\circ}C$ می باشد.

(ب) تفاوت جرم مولی روغن زیتون با فرمول مولکولی $C_{57}H_{110}O_6$ ($884: g.mol^{-1}$) و چربی کوهان شتر با فرمول مولکولی $C_{57}H_{110}O_6$ ($890: g.mol^{-1}$)، برابر ۶ بوده و ۳ برابر تفاوت جرم مولی آورده با فرمول مولکولی $CO(NH_2)_2$ ($60: g.mol^{-1}$) و اتیلن گلیکول با فرمول مولکولی $C_2H_6O_2$ ($62: g.mol^{-1}$) می باشد.

(پ) تفاوت شمار جفت الکترون ناپیوندی در یک پاک کننده صابونی ($\ddot{O}:-C-\ddot{O}:^{-}$ ، ۵ زوج ناپیوندی) و یک پاک کننده غیر صابونی



تفاوت های پاک کننده های غیر صابونی و صابونی جامد

تفاوت ها	پاک کننده های صابونی	پاک کننده های غیر صابونی
۱ فرمول بسته	$RCOO^{-}Na^{+}$	$RC_6H_4SO_3^{-}Na^{+}$
۲ فرمول گسترده	$R-\overset{\overset{\text{:O:}}{\parallel}}{C}-\ddot{O}:^{-}Na^{+}$ جفت ناپیوندی ۵	$R-\text{C}_6\text{H}_4-\overset{\overset{\text{:O:}}{\parallel}}{S}-\ddot{O}:^{-}Na^{+}$ جفت ناپیوندی ۹
۳ بخش ناقطبی آبگریز و چربی دوست	R	
۴ بخش قطبی آب دوست و چربی گریز	$-COO^{-}$	$-SO_3^{-}$
۵ قدرت پاک کنندگی در آب سخت	در آب سخت رسوب می دهد و قدرت پاک کنندگی کاهش می یابد.	در آب سخت واکنش نمی دهد و رسوب نمی کند، خاصیت پاک کنندگی حفظ می شود.

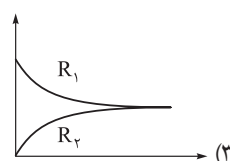
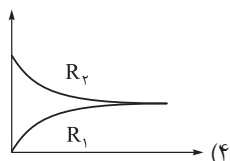
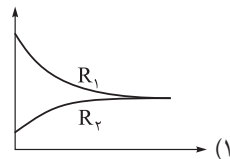
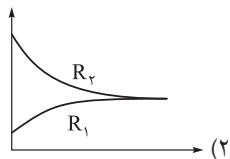
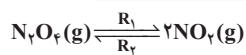
پاک کننده‌های غیرصابونی	پاک کننده‌های صابونی	تفاوت‌ها
از بنزن و مواد پتروشیمیایی دیگر، طی واکنش‌های پیچیده تولید می‌شود.	از چربی (روغن‌های گیاهی یا جانوری) ساخته می‌شود.	۶ نحوه ساخت
دارد و آروماتیک است.	ندارد و آروماتیک نیست.	۷ حلقه بنزن
با سه مولکول H_2 سیر می‌شود.	سیر شده است.	۸ سیرشدگی قسمت هیدروکربنی
دو کربن	یک کربن	۹ کربن بدون هیدروژن
سه اکسیژن	دو اکسیژن	۱۰ تعداد اکسیژن
بیشتر	کم‌تر	۱۱ قدرت پاک کنندگی

ت) *هواستون* باشد که با زنجیر هیدروکربنی سیر شده، جرم مولی صابون‌های با فرمول $RCOONa$ و $RCOOK$ ، عددی زوج است، ولی جرم مولی صابون با فرمول $RCOONH_4$ ، عددی فرد است؛ پس صابون مورد نظر متماً مایعست!

۲ مول گاز N_2O_4 و ۱ مول گاز NO_2 را در ظرفی به حجم ۲ لیتر وارد می‌کنیم تا مطابق واکنش زیر به تعادل برسند. اگر فشار

گازهای موجود در ظرف واکنش پس از برقراری تعادل، نسبت به حالت اولیه، $1/5$ برابر شده باشد، کدام نمودار تغییرات سرعت

واکنش‌های رفت (R_1) و برگشت (R_2) را به درستی نشان می‌دهد؟ تعادل در مجموع در جهت رفت جابه‌جا شده است.

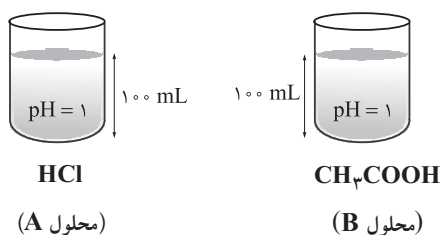


پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به این که مقدار اولیه هر دو گاز N_2O_4 و NO_2 ، مخالف صفر است، می‌توان نتیجه گرفت که R_1 و R_2 در آغاز واکنش نیز مخالف صفر می‌باشند. (گزینه‌های (۳) و (۴) پر!)

از سوی دیگر افزایش فشار گازهای موجود در ظرف پس از برقراری تعادل نسبت به حالت اولیه، بیانگر افزایش تعداد مول‌های گازی شکل درون ظرف است. همین موضوع نشان می‌دهد که تعادل در مجموع در جهت رفت جابه‌جا شده است؛ یعنی در ابتدای واکنش، سرعت واکنش رفت (R_1) بیشتر از سرعت واکنش برگشت (R_2) بوده است ($R_1 > R_2$).

چند مورد از مقایسه‌های زیر در ارتباط با محلول‌های A و B، درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)



۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

• سرعت واکنش با فلز منیزیم: $A = B$

• حجم گاز هیدروژن تولیدشده در واکنش با مقدار کافی فلز منیزیم: $A < B$

• مقدار سدیم هیدروکسید مورد نیاز برای خنثی کردن محلول: $A < B$

• جرم آنیون موجود در محلول: $A < B$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

همه عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

• سرعت واکنش فلز منیزیم با محلول‌های اسیدی به غلظت H^+ در آن‌ها وابسته است. در هر دو محلول به دلیل یکسان بودن pH،

غلظت یون H^+ با هم برابر است؛ در نتیجه سرعت واکنش دو محلول با فلز منیزیم نیز با هم برابر است!

• حجم گاز هیدروژن تولیدشده به تعداد مول اسید مصرفی وابسته است. دو محلول دارای pH یکسان هستند و چون اسید موجود

در محلول B، ضعیفه! در نتیجه شمار مول‌های اسید موجود در این محلول، بیشتره! و به همین دلیل، حجم گاز H_2 تولیدشده در

اثر واکنش فلز منیزیم با محلول B، بیشتر از محلول A خواهد بود.

• مقدار سدیم هیدروکسید مورد نیاز برای خنثی کردن دو محلول به تعداد مول اسید مصرفی بستگی دارد. همون‌طور که گفتیم در محلول B،

غلظت و مول اسید بیشتر است؛ در نتیجه مقدار NaOH مورد نیاز برای خنثی کردن محلول B، بیشتر از محلول A خواهد بود.

• با توجه به یکسان بودن غلظت یون‌ها و حجم دو محلول، تعداد مول آنیون‌ها در آن‌ها برابر است و از آن‌جا که آنیون موجود در

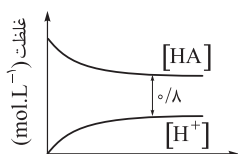
محلول B (CH_3COO^-)، جرم مولی بیشتری نسبت به آنیون موجود در محلول A (Cl^-) دارد؛ بنابراین می‌توان گفت که

جرم آنیون موجود در ظرف B، بیشتر از ظرف A می‌باشد.



۷۹

با توجه به نمودار زیر که نشان‌دهنده تغییرات غلظت برخی گونه‌ها در واکنش یونش ۲ مول از اسید ضعیف HA در محلولی به حجم ۵۰۰ mL است، ثابت یونش این اسید کدام است؟



$$\frac{4}{15} \text{ (۲)}$$

$$0/6 \text{ (۴)}$$

$$\frac{16}{15} \text{ (۱)}$$

$$0/3 \text{ (۳)}$$

 Hint

ابتدا غلظت مولی اولیه اسید HA را در محلول محاسبه کن، سپس معادله یونش این اسید را بنویس. در نهایت با توجه به تفاوت غلظت تعادلی اسید HA یونیده نشده و یون H^+ در محلول، غلظت تعادلی هر کدام را به دست بیاور و فیلی راهت! ثابت یونش (K_a) این اسید را حساب کن.

 پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: غلظت اولیه اسید HA را در محلول محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{2}{0/5} = 4 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: معادله یونش این اسید را نوشته و با توجه به نمودار، غلظت تعادلی گونه‌ها را در آن به دست می‌آوریم:

	$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$		
غلظت اولیه	۴	۰	۰
تغییرات غلظت	-x	+x	+x
غلظت نهایی (تعادلی)	۴-x	x	x

طبق نمودار، تفاوت غلظت‌های تعادلی اسید HA و یون H^+ ، برابر $0/8$ مول بر لیتر است؛ بنابراین می‌توان گفت که:

$$(4-x) - (x) = 0/8 \Rightarrow 4 - 2x = 0/8 \Rightarrow x = 1/6 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام سوم: ثابت یونش اسید HA را محاسبه می‌کنیم:

هواستون باشه که در محلول HA(aq)، غلظت H^+ با غلظت A^- برابر! پس محاسبه K_a ، این پوراست!

$$K = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{1/6 \times 1/6}{4 - 1/6} = \frac{3/2}{3} = \frac{32}{30} = \frac{16}{15}$$

چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

۸۰

- در کربوکسیلیک اسیدها با افزایش تعداد اتم‌های کربن، قدرت اسیدی افزایش می‌یابد.
- سدیم هیدروکسید یک باز بسیار قوی است و به طور کامل در آب یونش می‌یابد.
- در محلول اسیدهای ضعیف، میان اندک یون‌های حاصل از یونش و مولکول‌های یونیده‌نشده، تعادل برقرار می‌شود.
- در محلول‌های آبی، هر چه قدر غلظت یون هیدرونیوم افزایش یابد، به همان اندازه از غلظت یون هیدروکسید کاسته می‌شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



به جز عبارت سوم، سایر عبارت‌های داده‌شده نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- **هواستون کلاست!!** در کربوکسیلیک اسیدها با افزایش تعداد اتم‌های کربن، قدرت اسیدی **کاهش** می‌یابد. مثلاً قدرت اسیدی استیک (اتانوئیک) اسید (CH_3COOH) از فورمیک (متانوئیک) اسید، کم‌تره!
- سدیم هیدروکسید یک باز قوی است، ولی به دلیل آن‌که یک ترکیب یونی است، تبدیل آن به یون‌های مثبت و منفی **تفکیک یونی** نامیده می‌شود؛ نه یونش!
- در محلول اسیدهای ضعیف، میان اندک یون‌های حاصل از یونش و مولکول‌های یونیده‌نشده تعادل برقرار می‌شود.

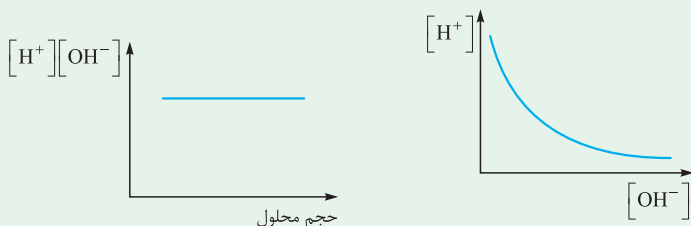


اسید	قوی (HA)	ضعیف (HX)
میزان یونش در آب	تقریباً به طور کامل یونش می‌یابد ($\alpha \approx 1$).	به طور جزئی یونش می‌یابد ($\alpha < 1$).
گونه‌های موجود در محلول آبی (به جز مولکول‌های آب)	فقط یون‌های آبپوشیده	یون‌های آبپوشیده و مولکول‌های اسید یونیده‌نشده
نمای ذره‌ای محلول آبی		
نمودار یونش		
رسانایی الکتریکی محلول آبی	رسانای قوی (لامپ کاملاً روشن در مدار الکتریکی)	رسانای ضعیف (لامپ نیمه‌روشن در مدار الکتریکی)
ثابت یونش	بسیار بزرگ: $\text{HI}, \text{HBr}, \text{HCl}, \text{H}_2\text{SO}_4$ بزرگ: HNO_3	یک عدد مشخص $\text{HF} > \text{HNO}_2 > \text{HCOOH} > \text{CH}_3\text{COOH} > \text{H}_2\text{CO}_3 > \text{HCN}$
سرعت واکنش با یک فلز در شرایط یکسان	سریع‌تر	آهسته‌تر

اسید	قوی (HA)	ضعیف (HX)
خاصیت اسیدی محلول و غلظت یون هیدرونیوم در محلول در غلظت اولیه یکسان	بیشتر	کمتر
pH در غلظت اولیه یکسان	کمتر	بیشتر

در محلول‌های آبی، هر چه قدر غلظت یون هیدرونیوم افزایش یابد، به همان نسبت (نه همان اندازه!) از غلظت یون هیدروکسید کاسته می‌شود تا حاصل ضرب آن‌ها در دمای معین، ثابت بماند.

با توجه به رابطه $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$ نتیجه می‌گیریم که در دمای اتاق غلظت یون‌های H^+ و OH^- با یکدیگر نسبت عکس دارند، یعنی اگر غلظت یون H^+ در یک محلول آبی افزایش یابد، به همان نسبت غلظت یون OH^- کاهش می‌یابد تا همواره حاصل ضرب غلظت آن‌ها برابر با یک عدد ثابت شود.



دقت کنید حاصل ضرب $[H^+][OH^-]$ فقط به دما بستگی دارد و با تغییر حجم محلول و ... تغییر نمی‌کند.



HX و HY دو اسید ضعیف هستند. اگر ۱۲ گرم از HX و ۸ گرم از HY جداگانه در ۳۰۰ میلی لیتر آب حل شوند، pH محلول HX،

۰/۵ واحد بیشتر از pH محلول HY خواهد شد. با توجه به آن نسبت $\frac{\alpha_{HY}}{\alpha_{HX}}$ کدام است؟ ($HY = 50$, $HX = 150$: g.mol⁻¹)

۳ (۲)

۱ (۳)

۲ (۴)

۱/۵ (۳)

مشاوره در کنکورهای اخیر، سؤال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده است؛ پس بر ما واجب که این سؤال‌ها رو خوب بررسی کنیم.

Hint

اختلاف pH دو محلول، نسبت $[H^+]$ را در دو محلول نشان می‌دهد. با توجه به آن و همچنین رابطه $[H^+] = \alpha M$ ، می‌توانی نسبت درجه یونش دو محلول را حساب کنی.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: pH محلول HX، ۰/۵ واحد بیشتر از HY است؛ پس $[H^+]$ در محلول HY بیشتر است:

$$pH_{HX} - pH_{HY} = 0.5 \Rightarrow -\log[H^+]_{HX} - (-\log[H^+]_{HY}) = 0.5$$

$$\Rightarrow \log[H^+]_{HY} - \log[H^+]_{HX} = 0.5 \Rightarrow \log\left(\frac{[H^+]_{HY}}{[H^+]_{HX}}\right) = 0.5 \Rightarrow \frac{[H^+]_{HY}}{[H^+]_{HX}} = 10^{0.5} = 3$$

گام دوم: در محلول اسیدهای ضعیف، غلظت یون هیدرونیوم را می‌توانیم با استفاده از غلظت اولیه و درجه یونش اسید محاسبه کنیم؛ بدین ترتیب نسبت درجه یونش دو اسید را می‌نویسیم:

$$\frac{[H^+]_{HY}}{[H^+]_{HX}} = \frac{\alpha_{HY} M_{HY}}{\alpha_{HX} M_{HX}} = 3 \Rightarrow \frac{\alpha_{HY}}{\alpha_{HX}} = 3 \times \frac{M_{HX}}{M_{HY}}$$

گام سوم: حالا! نسبت غلظت اولیه این دو اسید را حساب می‌کنیم. با استفاده از جرم، جرم مولی و حجم هر محلول، غلظت مولی آن‌ها قابل محاسبه است؛ بنابراین داریم:

$$HX \text{ محلول مولی: } \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{12}{150 \times 0.3} = \frac{12}{45} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$HY \text{ محلول مولی: } \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{8}{50 \times 0.3} = \frac{8}{15} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام چهارم: حالا باز! نسبت درجه یونش این دو اسید رو می‌سازیم:

$$\frac{\alpha_{HY}}{\alpha_{HX}} = 3 \times \frac{M_{HX}}{M_{HY}} = 3 \times \frac{12}{\frac{8}{15}} = \frac{3 \times 12 \times 15}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

HX و HY دو اسید ضعیف هستند. اگر ۱۲ گرم از HX و ۸ گرم از HY جداگانه در یک لیتر آب حل شوند، pH این دو محلول برابر

خواهد شد. با مقایسه درجه یونش آن‌ها مشخص کنید کدام اسید قوی‌تری است؟ چرا؟ (تمرین‌های دوره‌ای - صفحه ۳۵ کتاب درسی)

(۱ mol HX = ۱۵۰ g, ۱ mol HY = ۵۰ g)

چند مورد از موارد زیر، دربارهٔ محلول‌های ۰/۲ مولار هیدروفلوئوریک اسید و ۰/۱ مولار نیترو اسید، در دمای ثابت درست است؟

- دو محلول ممکن است pH یکسانی داشته باشند.
- دو محلول می‌توانند با مقدار یکسانی پتاسیم هیدروکسید به طور کامل واکنش دهند.
- با افزایش غلظت هر دو محلول، ثابت یونش هر دو اسید افزایش می‌یابد.
- با رقیق کردن هر دو محلول، درجهٔ یونش هر دو اسید کاهش می‌یابد.

K_a فقط به دما وابسته است و با تغییر غلظت محلول، ثابت باقی می‌ماند.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ تنها عبارت دوم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

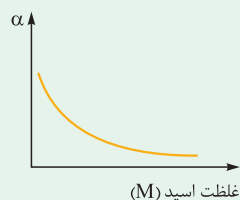
- غلظت یون H^+ در محلول هیدروفلوئوریک اسید به دلیل غلظت بیشتر و هم‌چنین قوی‌تر بودن نسبت به نیترو اسید، بیشتر است؛ در نتیجه نمی‌تواند pH برابری با محلول نیترو اسید داشته باشد.
- مقدار پتاسیم هیدروکسید مصرفی به تعداد مول اسید وابسته است. بدین ترتیب اگر حجم محلول نیترو اسید، ۲ برابر حجم محلول هیدروفلوئوریک اسید باشد، مقدار KOH مورد نیاز برای خنثی کردن کامل دو محلول، برابر خواهد بود.
- *مواستون باشد که* ثابت یونش فقط تابعی از دماست و با تغییر غلظت، ثابت باقی می‌ماند.
- در اسیدهای ضعیف، درجهٔ یونش با غلظت رابطهٔ عکس دارد و با رقیق کردن محلول، درجهٔ یونش آن‌ها افزایش می‌یابد.

برای اسیدهای ضعیف با K_a خیلی کوچک، رابطهٔ $K_a = M \cdot \alpha^2$ برقرار است. ثابت یونش تنها تابع دماست؛ بنابراین در دمای معین، K_a ثابت بوده و می‌توان گفت در اسیدهای ضعیف، اگر غلظت مولی (M) کاهش یابد، درجهٔ یونش (α) افزایش می‌یابد تا K_a ثابت بماند (در واقع با رقیق تر شدن محلول اسیدهای ضعیف، درجهٔ یونش اسید افزایش می‌یابد).

$$K_a = M \downarrow, \alpha^2 \uparrow \Rightarrow \alpha^2 \propto \frac{1}{M} \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} = \frac{M_2}{M_1} \right)$$

ثابت افزایش کاهش

بنابراین نمودار درجهٔ یونش یک اسید ضعیف برحسب تغییرات غلظت آن به صورت روبه‌رو است:



نکته

چند مورد از عبارت‌های زیر، همواره درست است؟

- در واکنش دو اسید با حجم و غلظت یکسان با فلز روی، میزان حجم گاز هیدروژن تولیدی برابر است.
- در واکنش دو اسید با حجم و pH یکسان با مقدار زیادی سدیم هیدروکسید، میزان آب تولیدشده برابر است.
- دو اسید با حجم و pH یکسان در واکنش با یک واکنش‌دهنده مشخص، سرعت یکسانی داشته و زمان واکنش آن‌ها نیز برابر است.
- اگر pH دو اسید قوی یکسان باشد، غلظت مولی هر دو اسید برابر است.
- سرعت واکنش محلول اسید قوی با فلز آهن، بیشتر از سرعت واکنش محلول اسید ضعیف با همان فلز است.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

متأسفانه! نمی‌توانیم درباره هیچ کدام از عبارت‌های داده‌شده بگوییم که همواره درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- ممکن است ظرفیت اسیدها متفاوت باشد. اسید با ظرفیت بیشتر (در حجم و غلظت یکسان) فراورده بیشتری تولید می‌کند.
- میزان فراورده تولیدی به pH محلول ربطی ندارد؛ بلکه به غلظت اولیه اسید، ظرفیت اسید و حجم محلول اسید بستگی دارد. ممکن است یک اسید ضعیف با غلظتی زیاد، pH یکسانی با یک اسید قوی داشته باشد، ولی میزان آب تولیدشده آن در واکنش با مقدار کافی سدیم هیدروکسید بیشتر خواهد بود.
- سرعت آغازی واکنش‌ها به واسطه غلظت H^+ برابر مشابه بوده، اما عواملی مانند قدرت اسید و غلظت اولیه اسید باعث می‌شوند زمان اتمام واکنش آن‌ها یکسان نباشد؛ یعنی مثل مورد بالا، ممکن است مقدار فراورده‌ها یکسان نباشد.
- اگر ظرفیت اسیدها متفاوت باشد، غلظت مولی آن‌ها نیز متفاوت خواهد بود. به عبارتی اسیدی که ظرفیت بیشتری دارد، غلظت مولی کم‌تری خواهد داشت.
- سرعت واکنش به $[H^+]$ یعنی pH وابسته است و ممکن است اسید ضعیف با داشتن pH کم‌تر (مثلاً داشتن غلظت اولیه خیلی بیشتر) سرعت واکنش بیشتری داشته باشد.

اگر مجموع pH محلول ۰/۲ مولار اسید HA و محلول ۰/۱ مولار باز BOH، برابر ۱۲/۴ باشد، نسبت درجه یونش اسید HA به درجه یونش باز BOH کدام است؟

۱۰ (۴)

۲۰ (۳)

۰/۱ (۲)

۰/۰۵ (۱)



Hint

با توجه به مجموع pH دو محلول، حاصل ضرب غلظت یون H^+ در دو محلول را حساب کن و با توجه به این که در محلول بازی، $[H^+].[OH^-] = 10^{-14}$ است، نسبت غلظت یون H^+ در محلول اسیدی به غلظت یون OH^- در محلول بازی را به دست بیاور. در نهایت با توجه به غلظت دو محلول، نسبت درجه یونش اسید HA به درجه یونش باز BOH را محاسبه کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: محلول های ۰/۲ مولار اسید HA و ۰/۱ مولار باز BOH را به ترتیب محلول های (۱) و (۲) در نظر می گیریم؛ بدین ترتیب می توانیم با توجه به مجموع pH دو محلول، حاصل ضرب غلظت یون H^+ را در آن ها حساب کنیم:

$$pH_1 + pH_2 = 12/4 \longrightarrow -\log[H^+]_1 + (-\log[H^+]_2) = 12/4 \longrightarrow \log[H^+]_1 + \log[H^+]_2 = -12/4$$

$$\longrightarrow \log[H^+]_1 \times [H^+]_2 = -12/4 \longrightarrow [H^+]_1 \times [H^+]_2 = 10^{-12/4} = 10^{-3} = (10^{-3/2})^2 \times 10^{-13} = 4 \times 10^{-13}$$

گام دوم: در محلول (۲)، $[H^+] \times [OH^-] = 10^{-14}$ است؛ در نتیجه می توانیم با محاسبه نسبت غلظت یون H^+ در محلول (۱)

به غلظت یون OH^- در محلول (۲) و همچنین با توجه به غلظت در محلول، فیلی را مت! نسبت $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ رو بساییم:

$$[H^+]_1 \times [H^+]_2 = 4 \times 10^{-13} \xrightarrow{[H^+]_2 = \frac{10^{-14}}{[OH^-]_2}} [H^+]_1 \times \frac{10^{-14}}{[OH^-]_2} = 4 \times 10^{-13} \longrightarrow \frac{[H^+]_1}{[OH^-]_2} = 40$$

$$\longrightarrow \frac{M_1 \alpha_1}{M_2 \alpha_2} = 40 \longrightarrow \frac{0/2 \times \alpha_1}{0/1 \times \alpha_2} = 40 \longrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 20$$

۱/۳۶ گرم گاز NH_3 را وارد ۱۰۰ میلی لیتر محلول ۰/۱ مولار آن می کنیم. اگر حجم و دمای محلول تغییری نکند، pH محلول حاصل به تقریب ($K_b = 2/56 \times 10^{-5}$, $H = 1$, $N = 14$: g.mol^{-1})

- (۱) یک واحد افزایش می یابد. (۲) ۰/۵ واحد افزایش می یابد.
(۳) یک واحد کاهش می یابد. (۴) ۰/۵ واحد کاهش می یابد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به این که واضعاً مقدار $\frac{K_b}{M} < 0/002$ است؛ در نتیجه می توانیم غلظت یون OH^- و pH محلول اولیه (رقیق) رو خیلی راحت با استفاده از رابطه تقریبی بمسابیم!

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [\text{OH}^-] = \sqrt{K_b \times M} = \sqrt{2/56 \times 10^{-5} \times 10^{-1}} = 1/6 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow [\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{[\text{OH}^-]} = \frac{10^{-14}}{1/6 \times 10^{-3}} = \frac{10^{-11}}{16} \\ \text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log 10^{-11} + \log 16 = 11 + 4 \log 2 = 11/2 \end{array} \right.$$

↓
۱/۲

گام دوم: غلظت مولی محلول نهایی (غلظ) را محاسبه می کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد مول } \text{NH}_3 \text{ افزوده شده} = 1/36 \text{ g } \text{NH}_3 \times \frac{1 \text{ mol } \text{NH}_3}{17 \text{ g } \text{NH}_3} = 0/08 \text{ mol } \text{NH}_3 \\ \text{تعداد مول } \text{NH}_3 \text{ موجود در محلول اولیه} = 100 \text{ mL} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{0/1 \text{ mol } \text{NH}_3}{1 \text{ L}} = 0/01 \text{ mol } \text{NH}_3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{تعداد مول } \text{NH}_3 \text{ در محلول نهایی} = 0/08 + 0/01 = 0/09 \text{ mol}$$

$$\text{غلظت مولی } \text{NH}_3 \text{ در محلول نهایی} = \frac{0/09 \text{ mol}}{0/1 \text{ L}} = 0/9 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام سوم: pH محلول نهایی (غلظ) را حساب می کنیم:

$$[\text{OH}^-] = \sqrt{K_b \times M} = \sqrt{2/56 \times 10^{-5} \times 9 \times 10^{-1}} = 4/8 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow [\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{4/8 \times 10^{-3}} = \frac{10^{-11}}{48}$$

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log 10^{-11} + \log 48 = 11 + \log 3 + \log 16 = 11 + 0/5 + 4 \log 2 = 11/7$$

↓
۱/۲

$$\Rightarrow \Delta \text{pH} = 11/7 - 11/2 = 0/5$$

بنابراین pH محلول به اندازه ۰/۵ واحد افزایش می یابد.

تعداد مول های محلول اولیه و ثانویه را تعیین کرده و در رابطه زیر قرار می دهیم. مواستون باشه که این رابطه به شرط ثابت بودن حجم محلول اولیه و ثانویه برای اسیدها و بازهای ضعیف صادق است:

$$\Delta \text{pH} = \frac{1}{2} \log \frac{n_{\text{غلظ}}}{n_{\text{رقیق}}} = \frac{1}{2} \log \frac{0/09 \text{ mol}}{0/01 \text{ mol}} = \frac{1}{2} \log 9 = \frac{1}{2} (2 \log 3) = 0/5$$

تیزبازی

جرم‌های برابری از سدیم اکسید ناخالص و دی‌نیتروژن پنتاکسید ناخالص را در آب حل کرده و حجم محلول را با افزودن آب به ۵ لیتر می‌رسانیم. اگر pH محلول حاصل برابر ۷ باشد، نسبت درصد خلوص سدیم اکسید به درصد خلوص دی‌نیتروژن پنتاکسید، به تقریب

کدام است؟ (ناخالصی‌ها باعث تغییر غلظت آب نمی‌شوند.) ($N = 14, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1}$)

دو محلول، به طور کامل با هم واکنش داده و یکدیگر را خنثی کرده‌اند.

۳ / ۴ (۲)

۱ / ۱۴ (۱)

۱ / ۷ (۴)

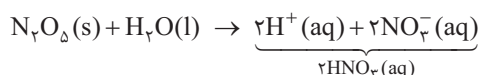
۰ / ۵۷ (۳)



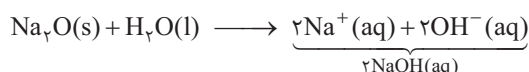
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از آن جایی که pH محلول حاصل برابر ۷ است، یعنی غلظت یون‌های H^+ و OH^- در محلول حاصل با هم برابر است و در واقع محلول به دست آمده، خنثی می‌باشد؛ بنابراین محلول‌های حاصل از سدیم اکسید (Na_2O) و دی‌نیتروژن پنتاکسید (N_2O_5) به طور کامل با یکدیگر واکنش داده‌اند.

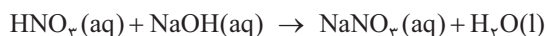
یادآوری هست که با حل شدن هر مول N_2O_5 در آب، ۲ مول H^+ و ۲ مول NO_3^- تولید می‌شود:



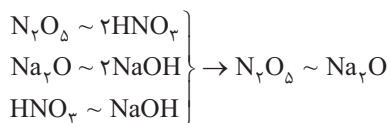
هم‌پنین اینم می‌دونین که با حل شدن هر مول اکسید فلز قلیایی در آب، ۲ مول کاتیون آن فلز و ۲ مول یون هیدروکسید تولید می‌شود:



بالا! این دو محلول طبق معادله زیر با هم واکنش می‌دهند:



با توجه به معادلات بالا می‌توان گفت که Na_2O و N_2O_5 با نسبت مولی یک‌به‌یک با هم واکنش می‌دهند:

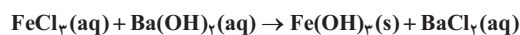


گام دوم: جرم اولیه دو ترکیب Na_2O و N_2O_5 را برابر x و درصد خلوص آن‌ها را به ترتیب برابر P_1 ، P_2 در نظر گرفته و با

توجه به نسبت مولی و واکنش کامل آن‌ها با یکدیگر، نسبت $\frac{P_1}{P_2}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم}}{100}}{\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{Na_2O}} = \frac{\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم}}{100}}{\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{N_2O_5}} \rightarrow \frac{x \times \frac{P_1}{100}}{1 \times 62} = \frac{x \times \frac{P_2}{100}}{1 \times 108} \rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{62}{108} \xrightarrow{\text{طبق گزینه‌ها}} 0.57$$

۲۰۰ میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید که غلظت مولی یون هیدروکسید در آن، $0/3$ مولار است، با چند میلی‌لیتر محلول آهن (III) کلرید که مجموع غلظت مولی یون‌ها در آن، $0/8$ مولار است، مطابق معادله موازنه‌نشده زیر به طور کامل واکنش داده و در پایان، چند گرم رسوب آهن (III) هیدروکسید تشکیل می‌شود؟ ($H = 1, O = 16, Fe = 56 : g.mol^{-1}$)



$$2/14 - 50 (2)$$

$$2/14 - 100 (1)$$

$$4/28 - 50 (4)$$

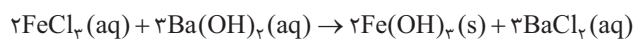
$$4/28 - 100 (3)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: غلظت‌های مولی باریم هیدروکسید ($Ba(OH)_2$) و آهن (III) کلرید ($FeCl_3$) را در محلول‌های اولیه آن‌ها حساب می‌کنیم:

$$Ba(OH)_2 \begin{cases} n_{OH^-} = 2 \Rightarrow [OH^-] = M.n.\alpha \Rightarrow 0/3 = M \times 2 \times 1 \Rightarrow M_{Ba(OH)_2} = 0/15 \text{ mol.L}^{-1} \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$FeCl_3 \begin{cases} M_{FeCl_3} = \frac{\text{مجموع غلظت مولی یون‌ها}}{4} = \frac{0/8}{2} = 0/2 \text{ mol.L}^{-1} \end{cases}$$

گام دوم: معادله واکنش انجام‌شده را موازنه می‌کنیم:



گام سوم: با توجه به غلظت و حجم محلول $Ba(OH)_2$ ، حجم محلول $FeCl_3$ مصرف شده و جرم رسوب $Fe(OH)_3$ تولیدشده را به دست می‌آوریم:
استفاده از کسر تبدیل:

$$200 \text{ mL } Ba(OH)_2 \text{ محلول} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{0/15 \text{ mol } Ba(OH)_2}{1 \text{ L } Ba(OH)_2 \text{ محلول}} \times \frac{2 \text{ mol } FeCl_3}{3 \text{ mol } Ba(OH)_2}$$

$$\times \frac{1 \text{ L } FeCl_3 \text{ محلول}}{0/2 \text{ mol } FeCl_3} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ L}} = 100 \text{ mL } FeCl_3 \text{ محلول}$$

$$200 \text{ mL } Ba(OH)_2 \text{ محلول} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{0/15 \text{ mol } Ba(OH)_2}{1 \text{ L } Ba(OH)_2 \text{ محلول}} \times \frac{2 \text{ mol } Fe(OH)_3}{3 \text{ mol } Ba(OH)_2} \times \frac{107 \text{ g } Fe(OH)_3}{1 \text{ mol } Fe(OH)_3}$$

$$= 2/14 \text{ g } Fe(OH)_3$$

استفاده از کسر تناسب:

به‌جور دیگر

$$\frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}_{Ba(OH)_2} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}_{FeCl_3} \rightarrow \frac{0/15 \times 200}{1} = \frac{0/2 \times x}{1} \rightarrow x = 100 \text{ mL } FeCl_3 \text{ محلول}$$

$$\frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}_{Ba(OH)_2} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Fe(OH)_3} \rightarrow \frac{0/15 \times 200}{1} = \frac{x}{2 \times 107} \rightarrow x = 2/14 \text{ g } Fe(OH)_3$$

برای خنثی کردن ۱۰۰ میلی لیتر محلول ۰/۰۲ مولار هیدروفلوئوریک اسید با درجه یونش ۰/۲، چند گرم سدیم هیدروکسید با درصد خلوص ۵۰٪

نیاز است؟ ($H = 1, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1}$)

۱) ۳۲/۰

۲) ۱۶/۰

۳) ۱۶/۰

۴) ۳۲/۰

مشاوره

اسید - باز، پای ثابت هر دوره از سوالات کنکور سراسری است، پس لازمه که به خوبی به این مبحث مسلط شوید تا بتوانید به راحتی! یک تست از کنکورتان را تضمین کنید.

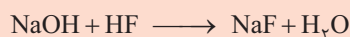
Hint

ابتدا شمار مول های HF را در محلول اولیه آن محاسبه کن، سپس معادله واکنش انجام شده را بنویس. در نهایت جرم سدیم هیدروکسید مورد نیاز برای خنثی کردن کامل محلول اسید HF را با توجه به درصد خلوص آن به دست بیاور.

گام اول: شمار مول های اسید HF را در محلول اولیه آن حساب می کنیم.

$$n_{HF} = \frac{100 \text{ mL} \times 0.02 \text{ mol/L}}{1000 \text{ mL/L}} = 0.002 \text{ mol}$$

گام دوم: حالا باید به ساینم که ۰/۰۰۲ مول HF با چند گرم سدیم هیدروکسید با خلوص ۵۰ درصد واکنش می دهد:



$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم} \times \text{درصد خلوص}} \longrightarrow \frac{0.002}{1} = \frac{x \times \frac{50}{100}}{1 \times 40} \longrightarrow x = 0.16 \text{ g NaOH}$$

مواستون باشه که به درجه یونش اسید، در حل این تست، نیازی نداریم و در واقع به طور دیتای اضافی مفسوب می شه!

گول نخوری

اگر pH محلول اسید HA ($\alpha = 0.2$)، برابر ۱/۴ باشد، در ۲۰۰ میلی لیتر از آن، چند مول اسید وجود دارد و این محلول با چند گرم سدیم هیدروژن کربنات با خلوص ۸۰ درصد واکنش می دهد؟ ($Na = 23, O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$) (تقریبی داخل ۹۹)



۲) ۴/۲۰, ۰/۰۲

۱) ۳/۳۶, ۰/۰۴

۴) ۴/۲۰, ۰/۰۴

۳) ۳/۳۶, ۰/۰۲

کدام مورد، نادرست است؟

(۱) باتری، مولدی است که در آن واکنش شیمیایی با سفر الکترون رخ می‌دهد تا بخشی از انرژی شیمیایی مواد به انرژی الکتریکی تبدیل شود.

(۲) در واکنش‌های اکسایش - کاهش، ماده‌ای که با گرفتن الکترون سبب اکسایش گونه دیگر می‌شود را اکسنده می‌نامند.

(۳) در گذشته برای عکاسی از سوختن $Mg(s)$ به عنوان منبع نور استفاده می‌شد که در این واکنش، منیزیم با نور خیره‌کننده‌ای به



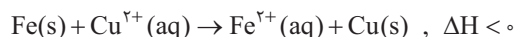
(۴) در واکنش تیغه آهن با محلول مس (II) سولفات، مخلوط واکنش گرم‌تر می‌شود، زیرا سامانه واکنش بخشی از انرژی را به

شکل گرما از محیط می‌گیرد. **واکنش به طور خودبه‌خودی انجام می‌شود.** **گرماگیر بودن واکنش و کاهش دما!**



پاسخ خیلی تشریحی ✓

وقتی واکنش آهن (Fe(s)) با مس (II) سولفات ($CuSO_4(aq)$) انجام می‌شود، مخلوط واکنش گرم‌تر می‌شود:



دلیل آن این است که در واکنش‌هایی از این دست، سطح انرژی فراورده‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها بوده و در واقع واکنش، گرماده است؛ بنابراین در این واکنش‌ها سامانه واکنش بخشی از انرژی خود را به شکل گرما به محیط می‌دهد؛ نه این‌که از محیط گرما بگیرد! بررسی سایر گزینه‌ها:

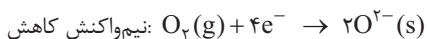
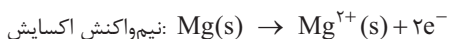
گزینه (۱): آره والا! متن کتاب که یادتون نرفته امیانت؟!

گزینه (۲):

اکسنده $\leftarrow$ الکترون از دست می‌دهد (اکسایش می‌یابد) و سبب کاهش گونه دیگر می‌شود.

اکسنده $\leftarrow$ الکترون می‌گیرد (کاهش می‌یابد) و سبب اکسایش گونه دیگر می‌شود.

گزینه (۳): در گذشته برای عکاسی، از سوختن منیزیم به عنوان منبع نور استفاده می‌شد. در این واکنش $Mg(s)$ با نور خیره‌کننده‌ای در $O_2(g)$ می‌سوزد و به $MgO(s)$ تبدیل می‌شود. نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش در این فرآیند را می‌توان به صورت زیر نشان داد:



کدام گزینه، عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«معادله نیم‌واکنش با معادله نیم‌واکنش یکسان است.»

(۱) کاتدی در سلول برقکافت آب - کاتدی در فرایند خوردگی آهن در محیط خنثی

(۲) آندی در سلول نور - الکتروشیمیایی سیلیسیم - آندی در سلول برقکافت آب

(۳) کاهش نیم‌سلول SHE در کاتد سلول گالوانی - آندی در سلول سوختی هیدروژن

(۴) کاتدی در سلول سوختی هیدروژن - کاتدی در فرایند خوردگی آهن در محیط اسیدی

مشاوره تسلط به نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش در انواع سلول الکتروشیمیایی، فیللی اهمیت دارد! در این سؤال، میزان تسلطی که به این نیم‌واکنش‌ها داریدین مشخص می‌شه.



همه نیم‌واکنش‌های مهم رو یک‌جا ببینید و یک بار برای همیشه پرونده این موضوع رو ببندید.

درتس Box

سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن

$H_2(g) \rightarrow 2H^+(aq) + 2e^-$	اکسایش
$O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$	کاهش
$2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l)$	کلی

خوردگی آهن

$Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$	اکسایش
در محیط غیراسیدی: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$	کاهش
در محیط اسیدی: $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$	
$4Fe(s) + 6H_2O(l) + 3O_2(g) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$	کلی

سلول سوختی متان - اکسیژن

$CH_4(g) + 2H_2O(l) \rightarrow CO_2(g) + 8H^+(aq) + 8e^-$	اکسایش
$2O_2(g) + 8H^+(aq) + 8e^- \rightarrow 4H_2O(l)$	کاهش
$CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(l)$	کلی

ورق گالوانیزه

$Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-$	اکسایش
$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$	کاهش
$2Zn(s) + O_2(g) + 2H_2O(l) \rightarrow 2Zn^{2+}(aq) + 4OH^-(aq)$	کلی

سلول نور الکتروشیمیایی

$Si(s) + 2H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s) + 4H^+(aq) + 4e^-$	اکسایش
$2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow H_2(g) + 2OH^-(aq)$	کاهش
$Si(s) + 2H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s) + 2H_2(g)$	کلی

حلی

$Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$	اکسایش
$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$	کاهش
$2Fe(s) + O_2(g) + 2H_2O(l) \rightarrow 2Fe^{2+}(aq) + 4OH^-(aq)$	کلی

سلول الکترولیتی برقکافت آب	
$2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$	اکسایش
$2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow H_2(g) + 2OH^-(aq)$	کاهش
$2H_2O(l) \rightarrow 2H_2(g) + O_2(g)$	کلی
سلول الکترولیتی برقکافت سدیم کلرید مذاب	
$2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g) + 2e^-$	اکسایش
$2Na^+(l) + 2e^- \rightarrow 2Na(l)$	کاهش
$2Na^+(l) + 2Cl^-(l) \rightarrow 2Na(l) + Cl_2(g)$	کلی
سلول هال	
$2O^{2-}(l) \rightarrow O_2(g) + 4e^-$	اکسایش
$Al^{3+} + 3e^- \rightarrow Al$	کاهش
$2Al_2O_3(s) + 3C(s) \rightarrow 4Al(l) + 3CO_2(g)$	کلی

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به نیم‌واکنش‌های ارائه‌شده، فقط در گزینه (۴) دو نیم‌واکنش مورد نظر با هم یکسان هستند.

گول نخوری ✗ حالا نیم‌واکنش‌هایی که شبیه به هم هستند و ممکنه تو ذهنتون قاطی پاتی بشه رو تو جدول زیر براتون آوردیم:

نیم‌واکنش	توضیح
$O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$	نیم‌واکنش کاهش اکسیژن در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن
$2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$ (برعکس بالای)	نیم‌واکنش اکسایش آب
$2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow H_2(g) + 2OH^-(aq)$	نیم‌واکنش کاهش آب
$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$	نیم‌واکنش کاهش اکسیژن در محیط خنثی (نیم‌واکنش کاهش در زنگ‌زدن آهن، خراشیده‌شدن آهن گالوانیزه و حلبی)

کدام موارد زیر، نادرست است؟

- (الف) در تمام سلول‌های گالوانی با گذشت زمان، جرم تیغه آندی کاهش و جرم تیغه کاتدی افزایش می‌یابد.
 (ب) emf واکنش‌های اکسایش - کاهش، مستقل از ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در آن‌ها است.
 (پ) در همه باتری‌ها با انجام نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی، جریان الکتریکی در مدار بیرونی برقرار می‌شود.
 (ت) با توجه به چگالی و E° کم فلز لیتیم، در ساخت همه باتری‌های دگمه‌ای از آن استفاده می‌شود.

کم‌ترین چگالی و E° را در میان فلزها داشته و در واقع قوی‌ترین کاهنده است.

(۲) الف - ت

(۴) ب - ت

(۱) الف - پ

(۳) ب - پ



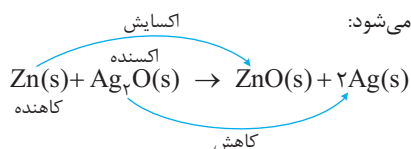
پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارت‌های «الف» و «ت» نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

(الف) در سلول گالوانی با کاتد SHE، $H_2(g)$ در نیم‌سلول کاتدی تولید می‌شود، اما جرم الکترود پلاتینی آن تغییری نمی‌کند.
 (ب) *هواستون باشد که* emf سلول گالوانی، به پتانسیل کاهشی نیم‌سلول‌های آندی و کاتدی بستگی دارد و مستقل از ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در واکنش اکسایش - کاهش مربوطه می‌باشد.

(پ) باتری‌ها در شکل، اندازه و کارایی با یکدیگر تفاوت آشکاری دارند، اما در همه آن‌ها با انجام شدن نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی، جریان الکتریکی در مدار بیرونی برقرار می‌شود.

(ت) در همه باتری‌های دگمه‌ای از لیتیم استفاده نمی‌شود. در تمرین‌های دوره‌ای صفحه ۶۳ کتاب درسی می‌خوانیم که باتری‌های روی - نقره از جمله باتری‌های دگمه‌ای هستند که در آن‌ها واکنش زیر انجام می‌شود:



در این باتری‌ها، اتم روی در آند اکسایش یافته و نقش کاهنده را دارد، نقره اکسید هم در کاتد کاهش یافته و نقش اکسنده را ایفا می‌کند.

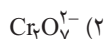
با توجه به پتانسیل‌های کاهش استاندارد زیر، کدام گونه اکسندۀ قوی‌تری است؟

$$E^{\circ}(\text{Cl}_2 / 2\text{Cl}^-) = +1 / 36\text{V}$$

$$E^{\circ}(\text{MnO}_4^- / \text{Mn}^{2+}) = +1 / 51\text{V}$$

$$E^{\circ}(\text{O}_2 / 2\text{H}_2\text{O}) = +1 / 23\text{V}$$

$$E^{\circ}(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} / 2\text{Cr}^{3+}) = +1 / 33\text{V}$$



دانش‌Box

پتانسیل‌های الکترودی استاندارد همواره به صورت پتانسیل کاهش استاندارد، به صورت زیر گزارش می‌شوند:

گونه کاهنده $\rightarrow +ne^-$ گونه اکسندۀ

اگر پتانسیل کاهش استاندارد این نیم‌واکنش برابر X ولت باشد، گزارش پتانسیل کاهش استاندارد به فرمت زیر صورت می‌گیرد:

$$E = xV \quad (\text{گونه کاهنده} / \text{گونه اکسندۀ})$$

می‌دانید که هر چه E° بزرگ‌تر یا مثبت‌تر باشد، قدرت گونه اکسندۀ به دریافت الکترون بیشتر و قدرت گونه کاهندۀ به الکترون‌دهی کمتر می‌شود و بالعکس!

هر چه E° منفی‌تر یا کم‌تر $\left\{ \begin{array}{l} \uparrow \text{قدرت کاهندگی گونه کاهنده} \\ \downarrow \text{قدرت اکسندگی گونه اکسندۀ} \end{array} \right.$

پس هنگامی که از شما پرسیدند: «کدام گونه بهتر کاهش می‌یابد (اکسندۀ قوی‌تری است)؟» شما باید گونه‌های سمت چپ نیم‌واکنش‌های کاهش را مقایسه کنید. هر چه E° مثبت‌تر باشد، گونه سمت چپ بهتر کاهش می‌یابد و اکسندۀ قوی‌تری است. به همین صورت اگر از شما پرسند: «کدام گونه بهتر اکسید می‌شود (کاهندۀ قوی‌تری است)؟» باید گونه‌های سمت راست نیم‌واکنش‌های کاهش را مقایسه کنید.

مقایسه قدرت کاهش‌یافتن یا اکسندگی $\leftarrow$ نگاه به چپ‌ها

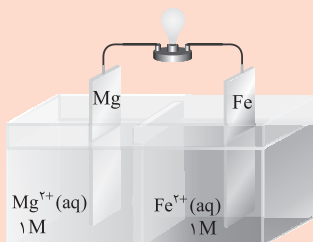
مقایسه قدرت اکسیدشدن یا کاهندگی $\leftarrow$ نگاه به راستی‌ها

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای پیدا کردن گونه با قدرت اکسندگی بیشتر، باید به دنبال گونه اکسندۀ ای (گونه سمت چپ نیم‌واکنش کاهش) باشیم که پتانسیل کاهش استاندارد آن (E°) بزرگ‌تر باشد. در بین گونه‌های ارائه‌شده در صورت سؤال، قدرت اکسندگی گونه MnO_4^- از بقیه بیشتره، اما MnO_4^- در بین گزینه‌ها نظاره نمی‌شه! بنابراین به سراغ دومین گونه اکسندۀ قوی یعنی Cl_2 می‌رویم که از قضا توگزینۀ (1) اومده!

با توجه به شکل و E° نیم واکنش ها، چند مورد از موارد زیر، نادرست است؟

$$E^\circ(\text{Mg}^{2+}(\text{aq}) / \text{Mg}(\text{s})) = -2 / 37 \text{ V} \quad , \quad E^\circ(\text{Fe}^{2+}(\text{aq}) / \text{Fe}(\text{s})) = -0 / 44 \text{ V}$$



- در این سلول، الکترون ها در مدار بیرونی، از الکترود منیزیم به سمت الکترود آهن جریان می یابند.
- کاتیون مربوط به آند از آند به سمت کاتد
- یون های منیزیم از طریق دیواره متخلخل به سمت نیم سلول آهن حرکت می کنند.
- با جایگزین کردن آند این سلول با فلز روی، جهت حرکت الکترون ها در مدار خارجی تغییر می کند.
- نیم سلول کاتد
- با جایگزین کردن کاتد این سلول با یک فلز کاهنده تر، emf سلول کاهش می یابد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



سلول گالوانی در یک نگاه!

درس Box

نیم سلول آند	نیم سلول کاتد
قطب منفی	قطب مثبت
در آن نیم واکنش اکسایش صورت می گیرد.	در آن نیم واکنش کاهش صورت می گیرد.
E° آن نسبت به E° کاتد، کوچک تر است.	E° آن نسبت به E° آند، بزرگ تر است.
با گذشت زمان، غلظت کاتیون مربوط به آند در آن زیاد می شود.	با گذشت زمان، غلظت کاتیون مربوط به کاتد در آن کم می شود.
به طور معمول جرم تیغه کاهش می یابد. (لاغر می شود).	به طور معمول جرم تیغه افزایش می یابد. (پاق می شود).
آنیون ها با عبور از دیواره متخلخل وارد آن می شوند.	کاتیون ها با عبور از دیواره متخلخل وارد آن می شوند.

تنها عبارت سوم نادرست است.

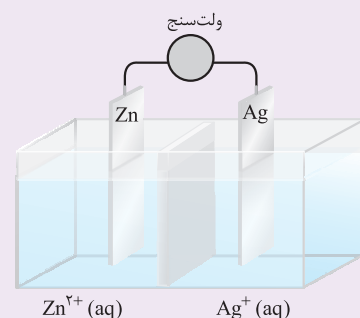
پاسخ خیلی تشریحی ✓

E° نیم سلول $(\text{Mg}^{2+} / \text{Mg})$ کمتر از E° نیم سلول $(\text{Fe}^{2+} / \text{Fe})$ است؛ بنابراین در سلول گالوانی حاصل از این دو نیم سلول، الکترود Mg نقش آند و الکترود Fe نقش کاتد را دارد. بررسی عبارت ها:

- جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی (سیم) از آند (منیزیم) به سمت کاتد (آهن) است.
- کاتیون های موجود در نیم سلول آند $(\text{Mg}^{2+}(\text{aq}))$ ، از طریق دیواره متخلخل به سمت نیم سلول کاتد (نیم سلول آهن) حرکت می کنند.
- نه والا! با جایگزین کردن آند سلول (Mg) با فلزی روی، الکترود آهن همچنان نقش کاتد را داشته و همچنان الکترون ها به سمت آن حرکت خواهند کرد؛ پس جهت حرکت الکترون ها تغییر نخواهد کرد.
- اگر کاتد یک سلول گالوانی را با یک فلز کاهنده تر (با E° کمتر) جایگزین کنیم، تفاوت E° کاتد و آند و در نتیجه emf سلول کمتر خواهد شد.

با توجه به شکل و E° نیم واکنش ها، کدام عبارت درست است؟ ($\text{Zn} = 65, \text{Ag} = 108 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) (تجربی قارچ ۹۴)

$$E^\circ(\text{Zn}^{2+}(\text{aq}) / \text{Zn}(\text{s})) = -0 / 76 \text{ V} \quad , \quad E^\circ(\text{Ag}^+(\text{aq}) / \text{Ag}(\text{s})) = +0 / 80 \text{ V}$$



- اگر میله روی به طور مستقیم وارد محلول نقره نیترات شود، $[\text{Ag}^+]$ به تدریج افزایش می یابد.
- برخی از یون های روی از دیواره متخلخل عبور کرده و وارد نیم سلول نقره می شوند.
- با اضافه کردن $\text{ZnSO}_4(\text{s})$ به محلول کاتدی، یک واکنش الکتروشیمیایی انجام می شود.
- اگر محلول اولیه آندی و کاتدی حجم و غلظت یکسانی از سولفات فلز مربوطه را داشته باشند، مقدار تغییر جرم تیغه کاتدی دو برابر تیغه آندی خواهد بود.

اگر در سلول گالوانی استاندارد Mg-SHE ، pH محلول کاتدی به 0.45 برسد، کاهش جرم تیغه آندی برابر چند گرم است؟ (حجم محلول‌های آندی و کاتدی برابر با 1 لیتر است؛ $\text{Mg} = 24 \text{ g.mol}^{-1}$)

۱۶ / ۸ (۱)

۱۵ / ۶ (۲)

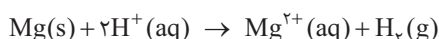
۸ / ۴ (۳)

۷ / ۸ (۴)

مشاوره سؤالات ترکیبی، رفته رفته! در کنکورهای سراسری پرتکرار و محبوب‌تر دارن می‌شن! بنابراین اگر به همچین سؤالاتی برخورد کردین، از شون رد نشید و اتفاقاً با پون و دل برین استقبالش!



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: معادله واکنش انجام‌شده در این سلول گالوانی را نوشته و موازنه می‌کنیم:



گام دوم: تفاوت غلظت اولیه و نهایی یون H^+ را که معادل یون H^+ مصرفی در این واکنش است، را حساب می‌کنیم:

غلظت نهایی یون H^+ از محلول کاتدی سلول، برابر است با:

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-0.45} = 10^{-2} \times 10^{1.55} = 10^{-2} \times 10^{0.85} \times 10^{0.7} = 10^{-2} \times 7 \times 5 = 0.35 \text{ mol.L}^{-1}$$

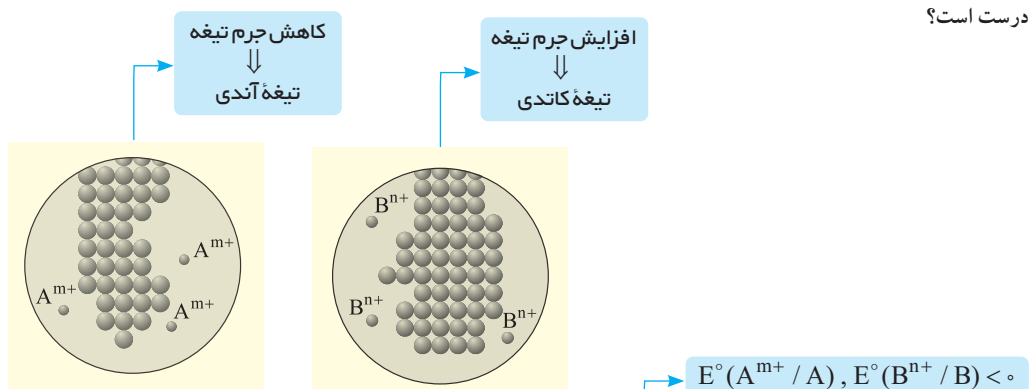
با توجه به این که غلظت اولیه یون H^+ ، 1 مولار است، تفاوت غلظت اولیه و نهایی آن برابر است با:

$$\Delta[\text{H}^+] = 1 - 0.35 = 0.65 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام سوم: با توجه به حجم نیم‌سلول‌ها و همچنین مقدار تغییر غلظت یون H^+ ، جرم Mg مصرفی در این فرایند را که معادل با کاهش تیغه آندی است، می‌ساییم:

$$\frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0.65 \times 1}{1} = \frac{x}{1 \times 24} \Rightarrow x = 7.8 \text{ g Mg}$$

با توجه به شکل‌های زیر که نشان‌دهنده تیغه‌های فلزی یک سلول گالوانی در محلول‌های آندی و کاتدی است، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



- اگر آلیاژی از فلزهای A و B در محلول هیدروکلریک اسید با $\text{pH} = 1$ به طور کامل حل شود، قدرت کاهندگی فلزهای A و B، بیشتر از Cu است.
- اگر تیغه‌های A و B به ترتیب مربوط به فلزهای روی و مس باشند، مجموع شمار اتم‌های تیغه‌های فلزی با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند.
- با قراردادن تیغه‌ای از جنس فلز A درون محلولی از نمک فلز B، جرم تیغه افزایش می‌یابد.
- اگر با قراردادن تیغه‌ای از جنس فلز B درون محلول ۱ مولار آهن (II) سولفات، دمای محلول تغییری نکند، مقایسه قدرت کاهندگی این سه فلز به صورت $B < \text{Fe} < A$ می‌باشد.

قدرت کاهندگی فلز B، کم‌تر از Fe است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



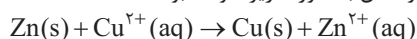
عبارت‌های اول و دوم درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: اگر فلزهای A و B در محلولی از HCl(aq) به طور کامل حل شوند، یعنی پتانسیل کاهشی استاندارد (E°) آن‌ها کم‌تر از صفر (منفی) است و از آن جایی که فلز مس دارای E° بزرگ‌تر از صفر (مثبت) است؛ بنابراین می‌توان گفت که قدرت کاهندگی فلزهای A و B، بیشتر از فلز Cu می‌باشد.

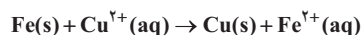
عبارت دوم: اگر تیغه‌های آندی و کاتدی به ترتیب روی و مس باشند، معادله واکنش به صورت زیر خواهد بود:



مشاهده که به ازای اکسایش هر اتم روی در این واکنش، یک یون Cu^{2+} کاهش می‌یابد. در واقع به ازای هر اتمی که از آند جدا می‌شود، یک اتم به کاتد اضافه می‌شود؛ بنابراین مجموع شمار اتم‌های تیغه‌های فلزی با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند. عبارت سوم: نه به قدر! مثلاً اگر فلزهای A و B به ترتیب روی و مس باشند، با انجام واکنش، اگر به اندازه یک مول یا ۶۵ گرم از جرم تیغه روی کم شود، با فرض این که همه Cu تولیدشده روی تیغه می‌نشینند، به اندازه یک مول Cu یعنی ۶۴ گرم به جرم تیغه اضافه می‌شود؛ پس با گذشت زمان و انجام واکنش، جرم تیغه کاهش خواهد یافت.

عبارت چهارم: اگر فلز B، طلا باشد، با وارد کردن تیغه‌ای از آن به درون محلول مس (II) سولفات، دمای محلول تغییری نخواهد کرد. از طرفی فلز A می‌تونه روی، منیزیم یا ... باشد که در این صورت قدرت کاهندگی آن از آهن پیشتره! در این حالت، مقایسه قدرت کاهندگی این سه فلز به صورت $B < \text{Fe} < A$ می‌باشد، اما هواستون باشه که فلز A هم چنین می‌تونه مس، نقره، قلع یا ... هم باشه که در این صورت قدرت کاهندگی آن از آهن کم‌تره! در این حالت، مقایسه قدرت کاهندگی این سه فلز به صورت $B < A < \text{Fe}$ خواهد بود. پس این عبارت لزوماً درست نیست!

ولت‌سنج سلول گالوانی Fe-Cu که واکنش زیر در آن انجام می‌شود، اختلاف پتانسیل میان دو نیم‌سلول را برابر ۰/۶۵ ولت نشان می‌دهد. اگر در این سلول گالوانی، ۴/۲ گرم از جرم تیغه آند کاسته شود، چند گرم بر جرم تیغه کاتد افزوده خواهد شد؟ (۷۵ درصد رسوب تولیدشده روی تیغه قرار می‌گیرد؛ $\text{Cu} = ۶۴$ ، $\text{Fe} = ۵۶$ ؛ g.mol^{-1})



$$E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = +۰/۳۴ \text{ V}, \quad E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -۰/۴۴ \text{ V}$$

۴ (۴

۳ (۳

۲/۵ (۲

۲ (۱



Hint

ابتدا با استفاده از عدد نشان داده شده توسط ولت‌سنج و پتانسیل‌های کاهشی استاندارد دو نیم‌سلول آندی و کاتدی، بازده سلول رو به دست بیار، سپس با استفاده از تغییر جرم تیغه آندی، مقدار افزایش جرم تیغه کاتدی را با توجه به این که ۷۵٪ رسوب تولیدشده روی تیغه قرار می‌گیرد، محاسبه کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تیغه‌های آندی و کاتدی در این سلول گالوانی، به ترتیب آهن و مس هستند؛ زیرا پتانسیل کاهشی استاندارد مس بزرگ‌تر از پتانسیل کاهشی استاندارد آهن است.

هالا! باید بازده سلول گالوانی مورد نظر را حساب کنیم:

اگر بازده برابر ۱۰۰ درصد باشد، emf سلول برابر است با:

$$\text{emf} = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = +۰/۳۴ - (-۰/۴۴) = +۰/۷۸ \text{ V}$$

از آن جایی که ولت‌سنج، اختلاف پتانسیل آند و کاتد را برابر ۰/۶۵ ولت نشان می‌دهد، پس بازده سلول گالوانی مورد نظر برابر است با:

$$\text{بازده سلول} = \frac{\text{عدد نشان داده شده توسط ولت‌سنج}}{\text{emf سلول}} \times ۱۰۰ = \frac{۰/۶۵}{۰/۷۸} \times ۱۰۰ = \frac{۵۰۰}{۶} \%$$

گام دوم: با توجه به تغییر جرم تیغه آندی (Fe) و معادله واکنش، جرم فلز مس تولیدشده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۰/۱}{۴/۲} \text{ g Fe} \times \frac{۱ \text{ mol Fe}}{۵۶ \text{ g Fe}} \times \frac{۶۴ \text{ g Cu}}{۱ \text{ mol Cu}} \times \frac{۵۰۰}{۶} = ۴ \text{ g Cu}$$

بازده سلول

مواستون باشه که از این میزان مس تولیدشده، فقط ۷۵ درصد بر روی تیغه کاتدی رسوب کرده و باعث افزایش جرم آن می‌شود:

$$\text{افزایش جرم تیغه کاتدی} = ۴ \times \frac{۷۵}{۱۰۰} = ۳ \text{ g}$$

اطلاعات چند ردیف از جدول زیر، دربارهٔ مقایسهٔ سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، کاملاً درست است؟

ردیف	مؤلفه	سلول گالوانی	سلول الکترولیتی
۱	علامت الکتروود آند	منفی	مثبت
۲	علامت الکتروود کاتد	مثبت	منفی
۳	علامت emf	مثبت	مثبت
۴	انجام‌شدن واکنش	غیر خودبه‌خودی	خودبه‌خودی
۵	جهت حرکت الکترون‌ها	از قطب منفی به مثبت	از قطب منفی به مثبت
۶	جهت حرکت یون‌ها	به سوی الکتروود با بار همنام	به سوی الکتروود با بار ناهمنام

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)



اطلاعات ردیف‌های «۱»، «۲» و «۶» دربارهٔ مقایسهٔ سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، کاملاً درست‌اند.

نسخهٔ درست و کامل جدول، این‌طور است:

ردیف	مؤلفه	سلول گالوانی	سلول الکترولیتی
۱	علامت الکتروود آند	منفی	مثبت
۲	علامت الکتروود کاتد	مثبت	منفی
۳	علامت emf	مثبت	منفی
۴	انجام‌شدن واکنش	خودبه‌خودی	غیر خودبه‌خودی
۵	جهت حرکت الکترون‌ها	از آند به کاتد (از قطب منفی به قطب مثبت)	از آند به کاتد (از قطب مثبت به قطب منفی)
۶	جهت حرکت یون‌ها	کاتیون‌ها (بار مثبت) به سمت کاتد (قطب مثبت) آنیون‌ها (بار منفی) به سمت الکتروود با بار همنام (آند (قطب منفی))	کاتیون‌ها (بار مثبت) به سمت کاتد (قطب منفی) آنیون‌ها (بار منفی) به سمت الکتروود با بار ناهمنام (آند (قطب مثبت))

پاسخ خیلی تشریحی ✓

درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- قدرت اکسندگی هالوژن‌ها، بیشتر از قدرت اکسندگی کاتیون فلزهای قلیایی هم‌دوره با آن‌ها است.
- اگر ترکیب HXO_3 در واکنش‌ها تنها به عنوان عامل اکسندگی شرکت کند، عنصر X متعلق به گروه ۱۷ جدول دوره‌ای است.
- افزایش ولتاژ اعمال‌شده به سلول الکترولیتی برقکافت آب می‌تواند باعث افزایش سرعت برقکافت شود.
- الکترولیت مورد استفاده در سلول برقکافت آب باید رسانایی الکتریکی داشته باشد.
- یکی از کاربردهای برقکافت آب، تولید گاز هیدروژن است که به عنوان سوخت در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن کاربرد دارد.

مشاوره هواستون باشه که در این سبک تست‌ها، نیازی به بررسی همه عبارت‌ها نیست و بهتره که با نگاه به گزینه‌ها عبارت‌ها رو بفوتین. مثلاً تو این تست، تنها با بررسی عبارت‌های اول و آخر می‌شه به پاسخ تست رسید

(۱) درست - نادرست - درست - درست - نادرست

(۲) نادرست - درست - درست - درست - نادرست

(۳) نادرست - درست - نادرست - درست - درست

(۴) درست - نادرست - درست - درست - درست



پاسخ خیلی تشریحی ✓ همه عبارت‌های داده‌شده، به‌جز عبارت دوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

• فلزهای قلیایی تمایل دارند با از دست دادن الکترون، اکسایش یابند و به آرایش گاز نجیب پیش از خود برسند و نافلزها (مثل هالوژن‌ها) تمایل دارند با گرفتن الکترون، کاهش یابند و به آرایش گاز نجیب هم‌دوره خود دست یابند؛ بنابراین به طور کلی در یک دوره از جدول دوره‌ای، قدرت اکسندگی هالوژن‌ها، بیشتر از قدرت اکسندگی کاتیون فلز قلیایی هم‌دوره با آن است.

بهتر است دامنه تغییرات عدد اکسایش برخی عناصر را بلد باشیم:

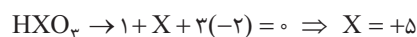
شماره گروه	۱	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
پایین‌ترین عدد اکسایش	۰	۰	۰	-۴	-۳	-۲	-۱
بالا‌ترین عدد اکسایش	+۱	+۲	+۳	+۴	+۵	+۶	+۷

به طور کلی در همه فلزها، پایین‌ترین عدد اکسایش برابر با صفر است (در حالت آزاد). برای عنصرهای گروه ۱۴ تا ۱۷ (به‌جز اکسیژن و فلوئور)، پایین‌ترین و بالاترین عدد اکسایش از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$18 - \text{شماره گروه} = \text{پایین‌ترین عدد اکسایش}$

$10 - \text{شماره گروه} = \text{بالاترین عدد اکسایش}$

• ابتدا عدد اکسایش عنصر X را در این ترکیب، حساب می‌کنیم:



با توجه به این که ترکیب HXO_3 تنها می‌تواند به عنوان عامل اکسندگی در واکنش‌های شیمیایی شرکت کند؛ بنابراین بیشترین مقدار عدد اکسایش عنصر X در آن، برابر ۵ بوده و در واقع عنصر X حداکثر دارای ۵ الکترون ظرفیتی بوده و متعلق به گروه ۱۵ جدول دوره‌ای است؛ پس این عنصر نمی‌تواند متعلق به گروه ۱۷ جدول دوره‌ای باشد؛ زیرا عنصرهای گروه ۱۷ دارای ۷ الکترون ظرفیتی هستند و بیشترین مقدار عدد اکسایش آن‌ها برابر (+۷) است. (البته به‌جز فلوئور که عدد اکسایش آن تنها می‌تواند اعداد صفر (در F_2) و -۱ (در بقیه گونه‌ها) باشد).

• افزایش ولتاژ اعمال‌شده به سلول الکترولیتی برقکافت آب می‌تواند سرعت تحرک یون‌ها و در نتیجه سرعت برقکافت را افزایش دهد.

• الکترولیت، نقش انتقال بار الکتریکی در محلول را ایفا می‌کند و باید رسانای الکتریسیته باشد؛ به همین دلیل که پهن آب خالص رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد، برای برقکافت آن باید اندکی الکترولیت به آب افزود.

• معادله واکنش فرایند برقکافت آب به صورت زیر است:

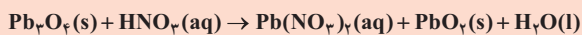


یکی از فراورده‌های این فرایند، گاز هیدروژن است که می‌توان از آن به عنوان سوخت در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن بهره برد.



مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها در معادله واکنش زیر پس از موازنه، کدام است و بر اثر مبادله ۱/۲ مول الکترون در این واکنش،

چند مول سرب (IV) اکسید تولید می‌شود؟



(۱) ۵، ۷۵ / ۰

(۲) ۵، ۹ / ۰

(۳) ۶، ۷۵ / ۰

(۴) ۶، ۹ / ۰

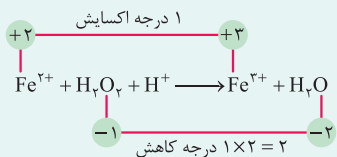
مشاوره در کنکورهای اخیر، موازنه به روش اکسایش - کاهش، بسی ترند و مورد علاقه طراحای کنکور بوده! در نتیجه این مبحث، جزء مباحث بسیار مهم بوده و نمی‌توانیم ارزش قهر در برین! رمز موفقیت در این تست‌ها، داشتن دقت زیاد در تمامی مراحل حل تسته! راستی! هتماً درس بالکس و پاسخ رو خوب بررسی کنین!

درس‌Box

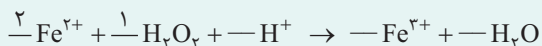
موازنه به روش تغییر عدد اکسایش

به طور کلی برای موازنه واکنش‌های اکسایش - کاهش، ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را حساب می‌کنیم، سپس مقدار تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده را ضریب گونه اکسایش کننده و مقدار تغییر عدد اکسایش گونه اکسایش کننده را ضریب کاهنده قرار می‌دهیم و در آخر، با توجه به ضرایبی که معلوم هستند، ضرایب بقیه گونه‌ها را تعیین می‌کنیم. هواستون باشه که اگر عنصری که عدد اکسایش آن تغییر کرده است، دارای زیروند باشد، باید تغییر عدد اکسایش آن را در زیروندش ضرب کنیم و سپس جابه‌جایی تغییر عدد اکسایش‌ها را انجام بدهیم.

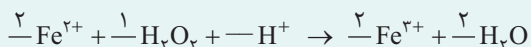
مثل: در این واکنش، عدد اکسایش آهن و اکسیژن تغییر کرده است:



چون در سمت چپ معادله، ۲ اتم اکسیژن در H_2O_2 داشتیم، تغییر عدد اکسایش آن را در ۲ ضرب کردیم. حالا ۲ (تغییر عدد اکسایش O) را ضریب Fe^{2+} و ۱ (تغییر عدد اکسایش Fe) را ضریب H_2O_2 قرار می‌دهیم:



به منظور برابری تعداد اتم‌های Fe و O در دو سمت معادله، ضریب Fe^{3+} و H_2O را برابر با ۲ قرار می‌دهیم:

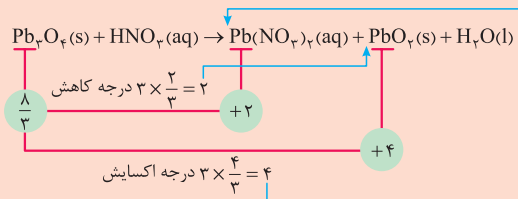


در آخر، به منظور موازنه شدن اتم‌های H و موازنه بار، ضریب H^+ را هم برابر با ۲ قرار می‌دهیم:

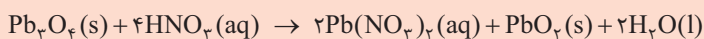


پاسخ خیلی تشریحی ✓ اول بریم سراغ موازنه معادله واکنش! در موازنه به روش اکسایش - کاهش، تغییر عدد اکسایش کاهنده را ضریب اکسایش کننده و تغییر عدد

اکسایش اکسایش کننده را ضریب کاهنده قرار می‌دهیم:



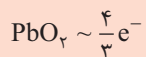
ضریب سایر مواد را به روش واریسی تعیین می‌کنیم:



بنابراین مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها در معادله موازنه‌شده این واکنش، برابر ۵ است.

هالا! باید شمار مول‌های PbO_2 تولیدشده در این واکنش را به ازای مبادله $1/2$ مول الکترون، محاسبه کنیم:

به ازای مبادله $\frac{4}{3}$ مول الکترون، در این واکنش، یک مول سرب (IV) اکسید (PbO_2) تولید می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که:



استفاده از کسر تبدیل:

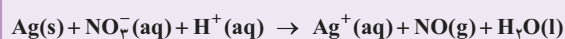
$$1/2 \text{ mole } e^- \times \frac{1 \text{ mol PbO}_2}{\frac{4}{3} \text{ mole } e^-} = 0/9 \text{ mol PbO}_2$$

استفاده از کسر تناسب:

په‌چور دیگه

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \rightarrow \frac{1/2}{4/3} = \frac{x}{1} \rightarrow x = 0/9 \text{ mol PbO}_2$$

مجموع ضریب‌های استوکیومتری مواد در واکنش اکسایش - کاهش زیر، کدام است و در نیم‌واکنش کاهش آن، به ازای هر مول گونه اکسنده، چند مول الکترون مبادله می‌شود؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.) (ریاضی دافل ۹۹)

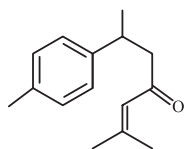


۴، ۱۴ (۲)

۳، ۱۴ (۱)

۳، ۱۵ (۴)

۴، ۱۵ (۳)



- با توجه به ساختار زیر که ترکیب آلی موجود در زردچوبه را نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟
- عدد اکسایش همه اتم‌های کربنی که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند، برابر صفر است.
 - ۴۰ درصد از اتم‌های کربن، دارای عدد اکسایش -۱ هستند.
 - اتم‌های کربن دارای عدد اکسایش -۳، حداکثر با یک اتم کربن پیوند دارند.
 - حداقل و حداکثر عدد اکسایش اتم‌های کربن شرکت‌کننده در پیوند دوگانه، به ترتیب برابر صفر و -۱ است.

۲ (۲)

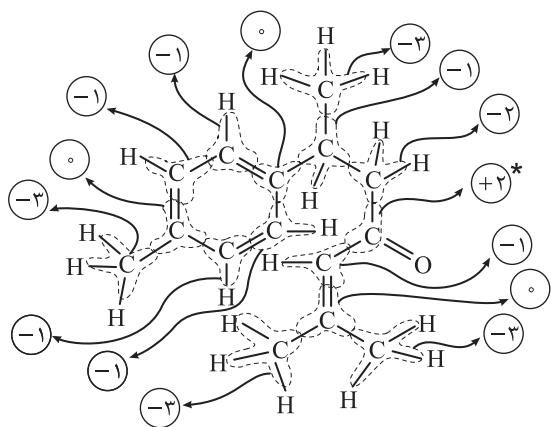
۴ (۴)

۱ (۱)

۳ (۳)

مشاوره تشخیص عدد اکسایش اتم‌های کربن در یک ترکیب آلی با ساختار پیچیده، تقریباً پای ثابت تمامی کنکورهای برگزار شده اخیر است. به این سؤال به چشم یک تمرین خوب نگاه کنید تا سرعت عملتون توی به دست آوردن عدد اکسایش اتم‌ها بیشتر شه.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



بررسی عبارت‌ها:

عبارت‌های اول و چهارم: نه والا! اتم کربن ستاره‌دار (*) مشخص شده در ساختار بالا، به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیست، همچنین در پیوند دوگانه شرکت کرده است، اما متأسفانه عدد اکسایش اون، برابر +۲ هستش و به تنهایی باعث نادرست بودن این دو عبارتته!

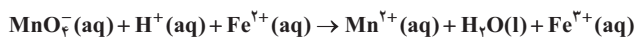
عبارت دوم: با توجه به ساختار بالا، مشفیه که ۶ اتم کربن دارای عدد اکسایش -۱ هستند، از طرفی در این ساختار، در مجموع ۱۵ اتم کربن وجود دارد؛ بنابراین داریم:

$$\frac{6}{15} \times 100 = 40\%$$

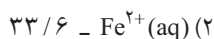
عبارت سوم: اتم‌های کربن دارای عدد اکسایش -۳ در این ساختار، همون اتم‌های کربن گروه‌های متیل هستند که حداکثر با یک اتم کربن پیوند دارند.

در واکنش موازنه‌نشده زیر، گونه نقش کاهنده داشته و با مصرف ۱۴/۲۸ گرم MnO_4^- ، گرم Fe^{3+} تولید می‌شود.

($\text{O} = ۱۶, \text{Mn} = ۵۵, \text{Fe} = ۵۶ : \text{g.mol}^{-1}$)



گونه‌ای که خودش اکسایش یافته و گونه(های) دیگر را کاهش می‌دهد.



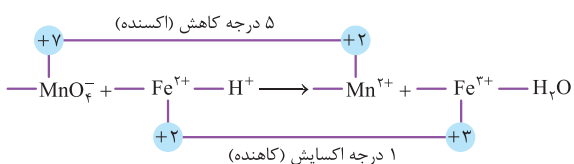
پاسخ خیلی تشریحی

گونه کاهنده، گونه‌ای است که اکسایش می‌یابد؛ یعنی عدد اکسایش آن بالاتر می‌رود. در این واکنش، $\text{Fe}^{2+}(\text{aq})$ کاهنده است؛

چون عدد اکسایش آن یک واحد (از ۲+ در Fe^{2+} به ۳+ در Fe^{3+}) افزایش یافته است.

هم‌چنین $\text{MnO}_4^-(\text{aq})$ اکسنده است؛ چون عدد اکسایش Mn در آن ۵ واحد (از ۷+ در MnO_4^- به ۲+ در Mn^{2+}) کاهش یافته است.

هالا! واکنش داده‌شده را موازنه می‌کنیم. برای این کار باید گونه‌های اکسنده و کاهنده را مشخص کنیم:



پس در سمت چپ به Fe^{2+} ضریب ۵ و به MnO_4^- ضریب ۱ می‌دهیم؛ به این ترتیب باید در سمت راست هم به Fe^{3+} ضریب ۵ و

به Mn^{2+} ضریب ۱ بدهیم:



الان در سمت راست، ۱۷ بار مثبت داریم و در سمت چپ فعلاً ۹ بار مثبت؛ پس به H^+ ضریب ۸ می‌دهیم تا بارها هم موازنه شوند،

سپس ضریب H_2O را برابر ۴ قرار می‌دهیم تا موازنه کامل شود:



در نهایت ما توجه به معادله موازنه‌شده واکنش، جرم یون Fe^{3+} تولیدشده را به ازای مصرف ۱۴/۲۸ گرم MnO_4^- ، می‌ساییم؛

استفاده از کسر تبدیل:

$$۱۴/۲۸ \text{ g MnO}_4^- \times \frac{۱ \text{ mol MnO}_4^-}{۱۱۹ \text{ g MnO}_4^-} \times \frac{۵ \text{ mol Fe}^{3+}}{۱ \text{ mol MnO}_4^-} \times \frac{۵۶ \text{ g Fe}^{3+}}{۱ \text{ mol Fe}^{3+}} = ۳۳/۶ \text{ g Fe}^{3+}$$

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{MnO}_4^-} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{Fe}^{3+}} \longrightarrow \frac{۱۴/۲۸}{۱ \times ۱۱۹} = \frac{x}{۵ \times ۵۶} \longrightarrow x = ۳۳/۶ \text{ g Fe}^{3+}$$

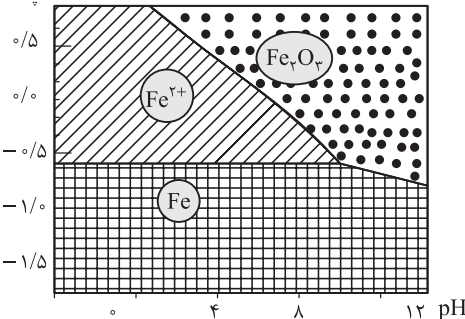
په‌جور دیگه

نمودار پوربه (شکل زیر)، رابطه بین پتانسیل الکترودی (E°)، pH محلول و گونه‌های شیمیایی پایدار آهن را نشان می‌دهد. با استفاده از

این نمودار می‌توان رفتار خوردگی آهن را در شرایط مختلف پیش‌بینی کرد. تفسیر نواحی مختلف این نمودار به صورت زیر است:

در این ناحیه، آهن تمایل به اکسیدشدن و تشکیل یون‌های آهن دارد.

پتانسیل الکترودی



ناحیه‌ای که در آن آهن به صورت فلز پایدار باقی

می‌ماند و خوردگی رخ نمی‌دهد.

در این ناحیه، اکسیدهای آهن پایدار هستند و ممکن

است لایه‌های محافظتی روی سطح آهن تشکیل شوند.

با توجه به اطلاعات کتاب درسی و شکل مقابل، کدام موارد

در رابطه با خوردگی آهن درست است؟

(الف) یک لوله فولادی در محیطی با $pH = 3$ و پتانسیل الکترودی 0.5 ولت، در معرض خوردگی شدید قرار دارد.

(ب) با انتقال یک قطعه فولادی از محیطی با $pH = 7$ به محیطی با $pH = 2$ ، سرعت خوردگی کاهش می‌یابد.

(پ) در محیط‌های بازی و پتانسیل‌های الکترودی بالا، تشکیل اکسید آهن، سرعت خوردگی سازه‌های آهنی را کاهش می‌دهد.

(ت) بر اثر قرارگیری قطعه‌های فولادی در معرض رطوبت محیط در دمای $25^\circ C$ و فشار 1 atm ، خوردگی قطعه‌ها انجام نمی‌پذیرد.

(ث) برای حفاظت از یک لوله فولادی در محیطی اسیدی، می‌توان از اعمال یک جریان الکتریکی برای کاهش پتانسیل لوله یا گالوانیزه کردن

قطعه استفاده کرد.

(۲) الف - ت - ث

(۱) الف - ب - پ

(۴) الف - پ - ث

(۳) ب - ت



پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارتهای «الف»، «پ» و «ث» درست هستند.

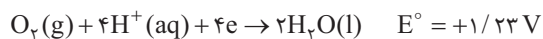
بررسی همه عبارت‌ها:

(الف) با توجه به نمودار، نقطه‌ای با $pH = 3$ و پتانسیل الکترودی 0.5 V، در ناحیه قرار دارد. در این ناحیه اتم‌های فلزی Fe



تمایل به تشکیل یون‌های آهن دارند و در واقع قطعه فولادی دچار خوردگی شدید می‌شود.

(ب) با انتقال قطعه فولادی از محیطی خنثی به محیطی اسیدی، نیم‌واکنش کاتدی زیر با پتانسیل الکترودی بالا انجام می‌شود.



در نتیجه در محیط‌های اسیدی، سرعت خوردگی سازه‌های فولادی افزایش می‌یابد.

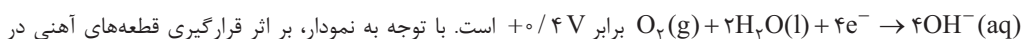
(پ) با توجه به نمودار، در محیط‌های بازی و پتانسیل‌های الکترودی بالا (یعنی ناحیه اکسید آهن Fe_2O_3) تشکیل



می‌شود. تشکیل اکسید آهن در لایه بیرونی قطعه‌های فولادی، به دلیل کاهش سطح تماس اتم‌های فلزی آهن با محیط بیرونی و

عوامل اکسنده، سرعت واکنش خوردگی را کاهش می‌دهد.

(ت) در دمای $25^\circ C$ ، فشار یک اتمسفر و غلظت یک مولار الکترولیت، پتانسیل کاهش استاندارد نیم‌واکنش کاتدی:



معرض رطوبت در این شرایط، یون‌های آهن تشکیل شده و خوردگی قطعه‌های فولادی انجام می‌پذیرد.

(ث) در محیط‌های اسیدی، آهن تمایل بالایی به تشکیل یون‌های آهن و خوردگی دارد؛ بنابراین با توجه به نمودار، اگر بتوان با اعمال



یک جریان الکتریکی، پتانسیل الکترودی لوله فولادی را کاهش داد، لوله در ناحیه قرار می‌گیرد و از خوردگی نجات پیدا می‌کند!

از طرفی با گالوانیزه کردن لوله نیز می‌توان از خوردگی اتم‌های آهن جلوگیری کرد، زیرا اتم‌های فلز روی، کاهنده‌تر از اتم‌های فلز آهن

هستند و از آن محافظت فیزیکی و کاتدی می‌کنند.

دو قاشق فلزی یکسان را در سلول‌های آبکاری (۱) و (۲) به ترتیب با فلزهای مس و نقره می‌پوشانیم. اگر شمار مول الکترون‌های مصرفی در سلول آبکاری (۱)، ۴ برابر سلول دیگر باشد، نسبت تفاوت جرم دو قاشق پس از انجام آبکاری برحسب گرم به شمار مول الکترون‌های مصرفی در سلول آبکاری (۲) برابر کدام است؟ ($\text{Cu} = ۶۴, \text{Ag} = ۱۰۸ : \text{g.mol}^{-1}$)

۲۲ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

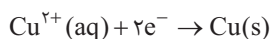
۱۶ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

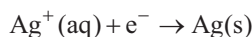
تعداد مول الکترون‌های مصرف‌شده در سلول‌های آبکاری (۱) و (۲) را به ترتیب برابر با $4x$ و x در نظر می‌گیریم.

نیم‌واکنش کاتدی سلول آبکاری (۱) به صورت زیر است:



$$\text{جرم افزایش جرم قاشق} = 4x \text{ mole}^{-} \times \frac{1 \text{ mol Cu}}{2 \text{ mole}^{-}} \times \frac{۶۴ \text{ g Cu}}{1 \text{ mol Cu}} = ۱۲۸x \text{ g}$$

هم‌چنین نیم‌واکنش کاتدی سلول آبکاری (۲) این‌طور است:



$$\text{جرم افزایش جرم قاشق} = x \text{ mole}^{-} \times \frac{1 \text{ mol Ag}}{1 \text{ mole}^{-}} \times \frac{۱۰۸ \text{ g Ag}}{1 \text{ mol Ag}} = ۱۰۸x \text{ g}$$

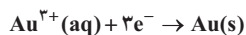
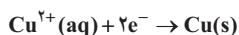
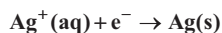
بنابراین با توجه به یکسان‌بودن قاشق‌های اولیه و برابری جرم آن‌ها داریم:

$$\Delta \text{جرم قاشق‌ها} = \text{افزایش جرم قاشق‌ها} = ۱۲۸x - ۱۰۸x = ۲۰x \text{ g}$$

و در نهایت! نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{تفاوت جرم قاشق‌ها}}{\text{شمار } \text{e}^{-} \text{ های مصرفی در سلول آبکاری (۲)}} = \frac{۲۰x \text{ g}}{x \text{ mole}^{-}} = ۲۰$$

سه گوی فولادی مشابه را با فلزهای نقره، مس و طلا آبکاری می‌کنیم. پاسخ درست دو پرسش زیر، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟
($\text{Cu} = 64, \text{Ag} = 108, \text{Au} = 197 \text{ g.mol}^{-1}$)

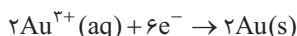
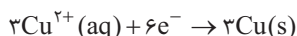
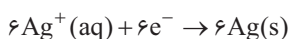


الف) اگر شمار الکترون‌های مبادله‌شده در فرایندهای آبکاری یکسان باشد، در آبکاری با کدام فلز، جرم گوی به میزان بیشتری افزایش می‌یابد؟
ب) اگر جرم گوی‌ها به یک‌اندازه افزایش یافته باشد، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آبکاری با کدام فلز بیشتر است؟



برای قسمت «الف» ضریب الکترون در معادله نیم‌واکنش‌ها روی‌کی‌کن، جرم فراورده‌ها را در نیم‌واکنش‌ها مقایسه کن. در قسمت «ب» نیز فرض کن جرم همه گوی‌ها یک گرم افزایش پیدا کرده است، سپس شمار مول‌های الکترون مبادله‌شده در سلول‌ها را محاسبه و مقایسه کن.

الف) ضریب الکترون در معادله نیم‌واکنش‌ها را یکسان می‌کنیم:

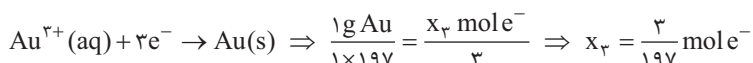
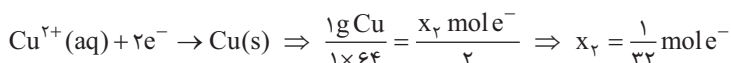
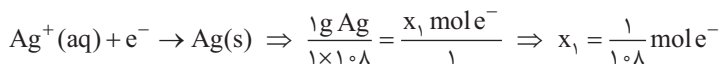


فقط کافیست جرم ۶ مول Ag ، ۳ مول Cu و ۲ مول Au را با هم مقایسه کنیم:

$$\begin{cases} \text{فقط کافیست جرم ۶ مول } \text{Ag} = 6 \times 108 = 648 \text{ g} \\ \text{جرم ۶ مول نقره} \\ \text{مقایسه میزان افزایش جرم} : \text{Ag} > \text{Au} > \text{Cu} \\ \text{جرم ۳ مول مس} = 3 \times 64 = 192 \text{ g} \\ \text{جرم ۲ مول طلا} = 2 \times 197 = 394 \text{ g} \end{cases}$$

همان‌طور که دیدید، به ازای مبادله شمار الکترون‌های برابر (در این‌جا ۶ مول الکترون) در سلول‌ها، در سلول آبکاری با فلز نقره، جرم گوی به میزان بیشتری افزایش پیدا کرده است.

ب) به ازای رسوب یک گرم از فلزهای Ag ، Cu و Au بر روی هر کدام از گوی‌ها، شمار مول‌های الکترون‌های مبادله‌شده را حساب و سپس مقایسه می‌کنیم. اگر شمار مول‌های الکترون‌های مبادله‌شده در سلول‌ها را با x_1 ، x_2 و x_3 نشان دهیم، می‌توان نوشت:



حالا سه عدد به‌دست‌آمده را مقایسه می‌کنیم. اگر صورت سه تا کسر را یکسان کنیم، مقایسه راحت‌تر می‌شود، زیرا در مقایسه ۳ عدد کسری با صورت‌های یکسان، هر چه مخرج کسر بزرگ‌تر باشد، کل کسر کوچک‌تر است؛ یعنی:

$$x_1 = \frac{1}{108}, \quad x_2 = \frac{1}{32}, \quad x_3 = \frac{3}{197} \approx \frac{1}{66} \Rightarrow \text{ترتیب مقایسه} : x_2 > x_3 > x_1$$

$\downarrow$
Cu
 $\downarrow$
Au
 $\downarrow$
Ag

پس اگر جرم گوی‌ها بر اثر آبکاری به یک میزان (در این‌جا یک گرم) افزایش یافته باشد، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در سلول آبکاری با فلز مس بیشتر از شمار الکترون‌های مبادله‌شده در دو سلول دیگر است.

هر چه نسبت «جرم مولی فلز / ضریب الکترون در معادله نیم‌واکنش کاهش»:

الف) بزرگ‌تر باشد $\leftarrow$ به ازای مبادله شمار الکترون‌های برابر، جرم گوی به میزان بیشتری افزایش می‌یابد.

ب) کوچک‌تر باشد $\leftarrow$ به ازای افزایش جرم گوی‌ها به میزان یکسان، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در سلول بیشتر است.

فلا هل سوال رو با این تیزبازی ببینید:

$$\text{Ag} = \frac{108}{1}, \text{Cu} = \frac{64}{2} = 32, \text{Au} = \frac{197}{3} \approx 66 \Rightarrow \begin{cases} \text{مقایسه میزان افزایش جرم گوی‌ها (الف)} : \text{Ag} > \text{Au} > \text{Cu} \\ \text{مقایسه شمار الکترون‌های مبادله‌شده در سلول‌ها (ب)} : \text{Cu} > \text{Au} > \text{Ag} \end{cases}$$



در سلول گالوانی «آهن - مس» جرم اولیه تیغه‌های آندی و کاتدی برابر است. اگر پس از گذشت مدتی، تفاوت جرم تیغه‌های آندی و کاتدی به ۱۴۴۰ گرم برسد، شمار الکترون‌های مبادله‌شده برابر چند است و در صورت مصرف این تعداد الکترون در فرایند هال، چند میلی‌لیتر آلومینیم مذاب تولید می‌شود؟ (چگالی فلز آلومینیم را $2/7 \text{ g.cm}^{-3}$ در نظر بگیرید؛ $\text{Cu} = 64$, $\text{Fe} = 56$, $\text{Al} = 27$: g.mol^{-1})

$$80 - 2/709 \times 10^{25} \quad (2)$$

$$80 - 1/4448 \times 10^{25} \quad (1)$$

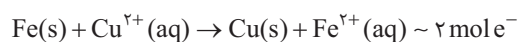
$$150 - 2/709 \times 10^{25} \quad (4)$$

$$150 - 1/4448 \times 10^{25} \quad (3)$$



مطابق این واکنش، با مصرف هر مول فلز آهن، به اندازه جرم مولی آهن (۵۶ g) از جرم تیغه آندی کاسته شده و به اندازه جرم مولی مس (۶۴ g) به جرم تیغه کاتدی افزوده می‌شود و با توجه به برابری جرم اولیه این دو تیغه، به ازای مصرف هر مول فلز آهن، $56 + 64 = 120 \text{ g}$ تفاوت جرم میان تیغه‌ها ایجاد می‌شود. حالا با توجه به تفاوت جرم تیغه‌ها، شمار الکترون‌های مبادله‌شده را حساب کن. در نهایت کافیه که معادله واکنش فرایند هال را بنویسی و حجم فلز Al تولیدشده در این فرایند را در صورت مصرف این تعداد الکترون، محاسبه کنی.

واکنش سلول گالوانی «آهن - مس» به صورت زیر است:



حال با توجه به تفاوت جرم تیغه‌های کاتدی و آندی، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در این سلول را حساب می‌کنیم:

$$1440 \text{ g جرم} \times \frac{1 \text{ mol Fe}}{120 \text{ g جرم}} \times \frac{2 \text{ mole}^{-}}{1 \text{ mol Fe}} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ e}^{-}}{1 \text{ mole}^{-}} = 1/4448 \times 10^{25} \text{ e}^{-}$$

هم‌اکنون؛ فرایند هال:



حجم فلز Al تولیدشده در فرایند هال را به ازای مبادله $1/4448 \times 10^{25}$ الکترون، محاسبه می‌کنیم:

$$1/4448 \times 10^{25} \text{ e}^{-} \times \frac{1 \text{ mole}^{-}}{6/02 \times 10^{23} \text{ e}^{-}} \times \frac{4 \text{ mol Al}}{12 \text{ mole}^{-}} \times \frac{27 \text{ g Al}}{1 \text{ mol Al}} \times \frac{1 \text{ mL Al}}{2/7 \text{ g Al}} = 80 \text{ mL Al}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓